المظاهر الطاقية للتذبذبات الميكانيكية

I تذكير:

1) شغل قوة ثابتة مطبقة على صلب في حركة إزاحة:

شغل قوة ثابتة $\vec{F}$ مطبقة على جسم صلب في حركة إزاحة خلال انتقال نقطة تأثيرها من نقطة A إلى نقطة B هو:

$$W\vec{F}_{A\to B} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{AB}})$$

ملحوظة: الشغل الجزئي الذي نرمز إليه ب: δW خلال انتقال جزئي $\delta\ell$ ، يعبر عنه كما يلي : $\delta W = \vec{F}.\vec{\delta\ell}$.

2) مبرهنة الطاقة الحركية:

في معلم غاليلي ، تغير الطاقة الحركية لجسم صلب (في حركة إزاحة أو في حركة دوران حول محور ثابت) بين لحظتين يساوي المجموع الجبري لأشغال القوى الخارجية المطبقة عليه بين هاتين اللحظتين.

$$\Delta E_C = \Sigma W\vec{F}_{ext}$$

مع :

$$\Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i}$$

- الطاقة الحركية بالنسبة لجسم صلب كتلته m وسرعته v في حركة إزاحة هي: $E_C = \frac{1}{2}mv^2$.
- الطاقة الحركية بالنسبة لجسم صلب عزم قصوره J_Δ في حركة دورا نية: $Ec = \frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2$

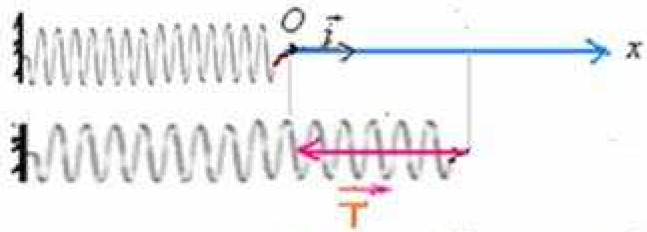
3) الطاقة الميكانيكية: نسمي الطاقة الميكانيكية لمجموعة مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع لهذه المجموعة.

II الدراسة الطاقية للنواس المرن :

1) شغل القوة المقرونة بتوتر نابض:

نعتبر نابضا ذي لفات غير متصلة صلابته K ، في وضع أفقي حيث أثبت أحد طرفيه إلى حامل ثابت.

نجذب النابض أفقيا بمسافة x_m ثم نحرره. لتكن $\vec{T}$ القوة المقرونة بتوتر النابض خلال تذبذبه حول موضع التوازن.



القوة $\vec{T} = -K.x\vec{i}$ قوة ارتداد ، هذه القوة غير ثابتة فهي تتعلق بالأفصول : x .

الشغل الجزئي للقوة المطبقة من طرف النابض خلال انتقال جزئي $\vec{\delta\ell} = \delta x.\vec{i}$ هو :

$$\delta W = \vec{T}.\vec{\delta\ell} = -K.x.\vec{i}.\vec{\delta\ell} = -K.x.\vec{i}.\delta x.\vec{i} = -K.x.\delta x$$

إذن الشغل الجزئي : $\delta W = -K.x.\delta x$

وبما أن الشغل الكلي يساوي مجموع الأشغال الجزئية ، يمكننا تحديد شغل القوة $\vec{T}$ خلال انتقال نقطة تأثيرها من نقطة M_1 ذات الأفصول x_1 إلى نقطة M_2 ذات الأفصول x_2 باستعمال الحساب التكاملي. بحيث لدينا : $dW = -K.x.dx$

القوة $\vec{T} = -K.x\vec{i}$ قوة ارتداد ، هذه القوة غير ثابتة فهي تتعلق بالأفصول : x.

الشغل الجزئي للقوة المطبقة من طرف النابض خلال انتقال جزئي $\vec{\delta\ell} = \delta x\,\vec{i}$ هو :

$$\delta W = \vec{T}.\vec{\delta\ell} = -K.x\vec{i}.\vec{\delta\ell} = -K.x\vec{i}.\delta x\vec{i} = -K.x.\delta x$$

إذن الشغل الجزئي : $\delta W = -K.x.\delta x$

وبما أن الشغل الكلي يساوي مجموع الأشغال الجزئية ، يمكننا تحديد شغل القوة $\vec{T}$ خلال انتقال نقطة تأثيرها من نقطة M_1 ذات الأفصول x_1 إلى نقطة M_2 ذات الأفصول x_2 باستعمال الحساب التكاملي. بحيث لدينا : $dW = -K.x.dx$

$$W\vec{T}_{M_1 \to M_2} = \int_{x_1}^{x_2} -K.x.dx = -K\int_{x1}^{x2} x.dx = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

بصفة عامة:

تعبير شغل القوة المقرونة بتوتر نابض خلال الانتقال من الموضع البدئي الذي أفصوله x_A إلى الموضع النهائي الذي أفصوله x_B هو كما يلي:

$$W\vec{T}_{A->B} = \frac{1}{2}.K({x_A}^2 - {x_B}^2)$$

2) الدراسة الطاقية للنواس المرن:

أ) طاقة الوضع المرنة:

طاقة الوضع المرنة للنواس المرن هي الطاقة التي تمتلكها المجموعة من جراء تشويه النابض وتعطيها العلاقة التالية:

$$Epe = \frac{1}{2}K.x^2 + c^{te}$$

حيث: K صلابة النابض. x :إطالته.

والثابتة c^{te} تحدد قيمتها باستعمال الحالة المرجعية .

وعمليا نختار كحالة المرجعية $Epe = 0$ عندما يكون النابض غير مشوها أي عند $x = 0$.

بالتعويض في التعبير السابق نحصل على $c^{te} = 0$.

وبالتالي يعبر عن طاقة الوضع للنواس المرن بالعلاقة: $E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2$ باعتبار $E_{pe} = 0$ عند $x = 0$.

ملحوظة1: تغير طاقة الوضع المرنة لا يتعلق بالحالة المرجعية :

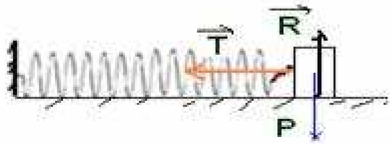
في الموضع x_1 لدينا : $Ep_1 = \frac{1}{2}k.x_1 + C$

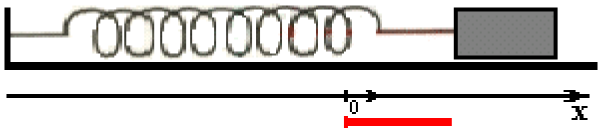
في الموضع x_2 لدينا : $Ep_2 = \frac{1}{2}k.x_2 + C$

وتغير طاقة الوضع : $\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)$

ب)انحفاظ الطاقة الميكانيكية:

نعتبر النواس المرن الأفقي خلال حركته التذبذبية .





بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على المجموعة خلال انتقال الجسم S من الموضع x_1 إلى الموضع x_2.

$$\Delta Ec = W\vec{P} + W\vec{R} + W\vec{T}$$

$W\vec{R} = 0$ و $W\vec{P} = 0$ لأنهما متعامدتان مع اتجاه الحركة.

إذن: $\Delta Ec = W\vec{T}$ ولدينا : $W\vec{T}_{A->B} = \frac{1}{2}.K(x_1^2 - x_2^2) = -\Delta E_{pe}$ إذن العلاقة (1) تصبح. $\Delta Ec = -\Delta E_{pe}$

أي : $E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{P2} \Leftarrow$ $E_{C1} + E_{P1} = E_{C2} + E_{P2}$

أي : $E_{M1} = E_{M2}$ وبالتالي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تنحفظ بين الموضعين 1 و2.

وبما أن الطاقة الميكانيكية : $E_M = Ec + Epe = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.k.x^2$ مع: $Epe = 0$ عند $x = 0$

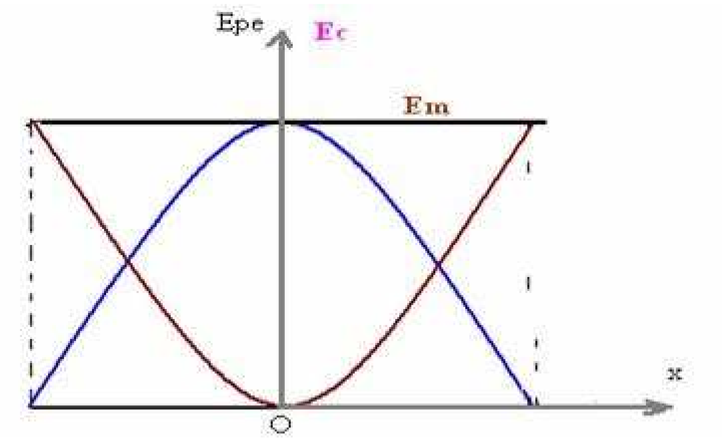
إذا كانت الاحتكاكات مهملة ، ليس هناك تبدد للطاقة أي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تنحفظ. $E_M = C^{te}$

إذن: $\frac{dE_M}{dt} = 0 \Leftarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.K.x^2) = 0 \Leftarrow \frac{1}{2}.m(2.v.\frac{dv}{dt}) + \frac{1}{2}.K.(2.x.\frac{dx}{dt}) = 0 \Leftarrow$

$m.\dot{x}.\ddot{x} + k.x.\dot{x} = 0 \Leftarrow$ $m.\ddot{x} + k.x = 0$ المعادلة التفاضلية للحركة، مع: $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

ج)مخططات الطاقة:

يمكن تمثيل تغيرات E_{pe} وE_c و E_m بدلالة x .



إن حل المعادلة التفاضية هو دالة جيبية تكتب كالتالي: $m.\ddot{x}+k.x=0$

$$x = x_m \cos(\omega_o.t+\varphi)$$

فإن:

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2 = \frac{1}{2}.K.x^2{}_m.\cos^2(\omega_o.t+\varphi)$$

و:

$$E_c = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.mx_m{}^2.\omega_o{}^2.\sin^2(\omega_o.t+\varphi)$$

إذن:

$$E_m = E_{pt} + E_C = \frac{1}{2}K.x_m{}^2.\cos^2(\omega_o.t+\varphi) + \frac{1}{2}.m.x_m{}^2\omega_0{}^2\sin^2(\omega_o.t+\varphi)$$

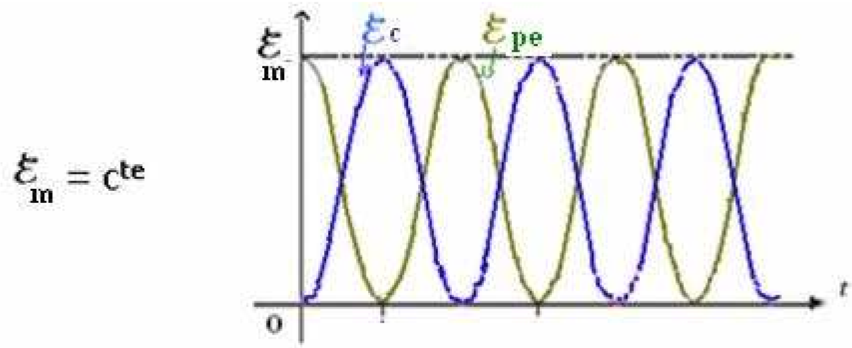
نعوض :

$$\omega_0{}^2 = \frac{K}{m}$$

فنحصل على:

$$E_m = \frac{1}{2}K.x_m^2\left[\cos^2(\omega_o.t+\varphi)+\sin^2(\omega_o.t+\varphi)\right]=\frac{1}{2}.K.x_m^2$$

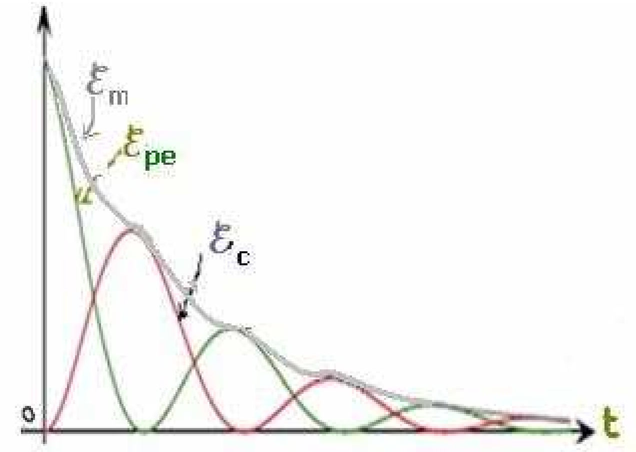
$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}.K.x_m^2 = C^{te}}$$



ج) في حالة وجود الاحتكاكات:

في هذه الحالة يتناقص وسع التذبذبات تدريجيا ، فنحصل على نظام شبه دوري (أو لا دوري وذلك حسب أهمية الاحتكاك).

الطاقة الميكانيكية للمجموعة تتناقص مع مرور الزمن إلى أن يتوقف المتذبذب عن الحركة.



III الدراسة الطاقية لنواس اللي :

1) الطاقة الحركية للمجموعة:

تنحصر الطاقة الحركية لنواس اللي في الطاقة الحركية للقضيب $E_c = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2$ مع J_Δ عزم قصور القضيب و $\dot{\theta}$ سرعته الزاوية

2) طاقة الوضع للي :

طاقة الوضع للي تعطيها العلاقة التالية : $E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2 + C^{te}$

عادة نأخذ كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ وبذلك تكون $C^{te} = 0$.

وبالتالي: $E_{pt} = \frac{1}{2}C.\theta^2$

3) الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

باعتبار كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ يكون تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي كما يلي:

$$E_m = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2$$

إذا كانت الاحتكاكات مهملة ، ليس هناك تبدد للطاقة أي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تنحفظ. $E_M = C^{te}$

إذن: $\frac{dE_M}{dt} = 0 \Leftarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2) = 0 \Leftarrow \frac{1}{2}.J_\Delta(2.\dot{\theta}.\frac{d\dot{\theta}}{dt}) + \frac{1}{2}.C.(2.\theta.\frac{d\theta}{dt}) = 0 \Leftarrow$

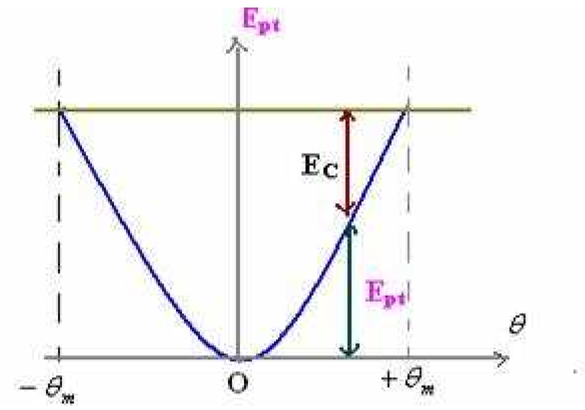
$J_\Delta.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + C.\theta.\dot{\theta} = 0 \Leftarrow$ $J_\Delta.\ddot{\theta} + C.\theta = 0$ المعادلة التفاضلية للحركة. $\omega_o^2 = \frac{C}{J_\Delta}$

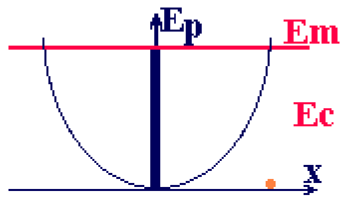
الحل هو كمايلي : $\theta = \theta_m \cos(\omega_o.t + \varphi)$

إذن الطاقة الميكانيكية : $E_m = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2$

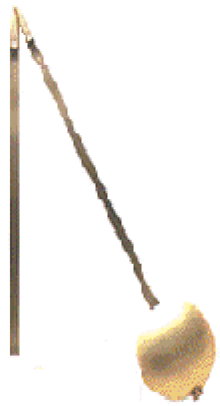
بتعويض θ و $\dot{\theta}$ و $\omega_o^2 = \frac{C}{J_\Delta}$ في العلاقة أعلاه ، نحصل على : $E_m = \frac{1}{2}.C.\theta_m^2 = C^{te}$

يمكن تمثيل $E_{pt}=\frac{1}{2}.C.\theta^2$ هو عبارة عن منحنى شلجمي.



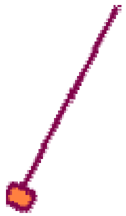


IV الدراسة الطاقية للنواس الوازن :



انقر فوق الصورة لمشاهدة تذبذبات النواس

النواس الوازن: هو كل جسم صلب غير قابل للتشويه يمكنه إنجاز حركة تذبذبية حول محور ثابت لا يمر بمركز قصوره.



انقر فوق الصورة لمشاهدة تذبذبات النواس

1) الطاقة الحركية للمجموعة:

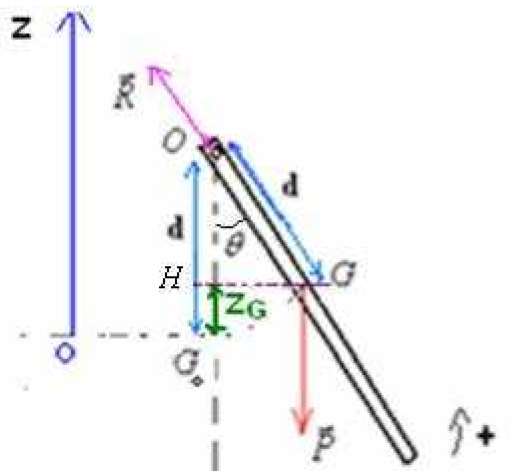
الطاقة الحركية للنواس الوازن في $Ec = \frac{1}{2}.J_{\Delta}.\dot{\theta}^2$ **مع(** J_{Δ} **عزم قصور النواس الوازن و** $\dot{\theta}$ **سرعته الزاوية)**

2) طاقة الوضع الثقالية للمجموعة:

طاقة الثقالية للنواس الوازن تعطيها العلاقة التالية : $E_{pp} = m.gz + C^{te}$

عادة نأخذ كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ وبذلك تكون $C^{te} = 0$.

وبالتالي: $E_{pp} = m.gz$



عندما يكون النواس مُزاحا بزاوية θ عن موضع توازنه المستقر ، تكون طاقة وضعه الثقالية $E_{pp} = m.gz_G$:

$$z_G = d - OH = d - d\cos\theta = d(1-\cos\theta)$$

ومنه : $E_{pp} = m.gd(1-\cos\theta)$ عبارة عن دالة جيبية مع : $-\theta_m \le \theta \le +\theta_m$

نشير على وجود حالتين ممكنتين :

الحالة الاولى : إذا كانت $E_m > 2mgd$ الطاقة الحركية للمجموعة لا تنعدم أي النواس الوازن لا يتذبذب بل يدور باستمرار في نفس . المجموعة في هذه الحالة ليست بمتذبذب ميكانيكي.

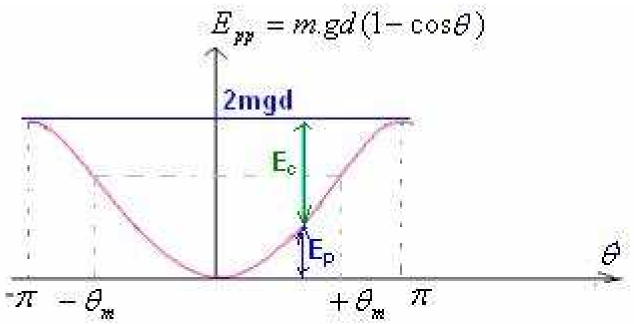
الحالة الثانية: إذا كانت $E_m < 2mgd$ تنعدم الطاقة الحركية للنواس عند $\theta = \pm\theta_m$ وبذلك يتذبذب بشكل دوري.

3) الطاقة الميكانيكية للمجموعة:

$$E_m = Ec + E_{pp}$$

$$...... = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + mgz + C^{te}$$

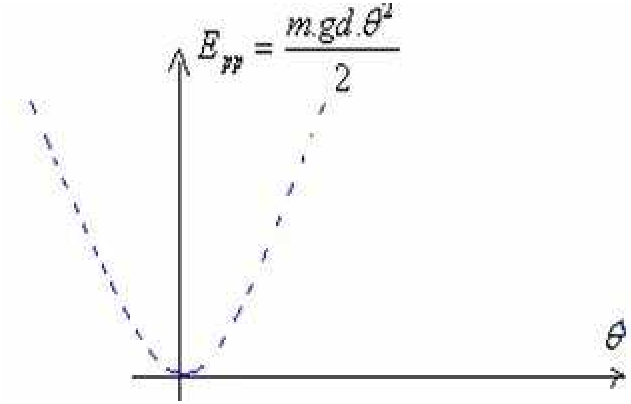
4) مخططات الطاقة:



طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن : $E_{pp} = m.gd(1-\cos\theta)$

بالنسبة للتذبذبات الصغيرة حيث تكون $\theta \leq 15°$ ، يمكننا أن نكتب بتقدير مقبول $1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$.

تصبح : $E_{pp} = \frac{m.gd.\theta^2}{2}$. وفي هذه الحالة المنحنى الممثل لتغيرات طاقة الوضع بدلالة θ عبارة عن منحنى شلجمي.



التوجيهات:

– يذكر بتعاريف الطاقة الحركية و طاقة الوضع الثقالية و الطاقة الميكانيكية و مبرهنة الطاقة الحركية و انحفاظ الطاقة الميكانيكية كتعلمات أساسية مكتسبة في المستوى الدراسي السابق؛

– يعبر عن الشغل الجزئي لقوة غير ثابتة مطبقة على جسم في حالة انتقال غير مستقيمي؛

يتوصل نظريا(مبيانيا و عن طريق التكامل) إلى تعبير شغل قوة خارجية مطبقة على نابض؛

– يتوصل إلى تعبير طاقة الوضع المرنة، و تبرز ضرورة تحديد الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة؛

– يستحسن استثمار التسجيلات المنجزة أثناء دراسة المتذبذب (جسم صلب – نابض) للتوصل إلى انحفاظ طاقته في الحالة التي يكون فيها الجسم الصلب في حركة فوق مستوى أفقي؛

– يتوصل إلى شغل مزدوجة اللي و طاقة وضع للي بإتباع نفس الطريقة المعتمدة بالنسبة للمجموعات (جسم صلب – نابض)؛

– يتم استغلال تعبير طاقة الوضع للي و تعبير الطاقة الحركية في حالة الدوران حول محور ثابت لتحديد الطاقة الميكانيكية لنواس اللي و يتطرق في حالة انحفاظ الطاقة الميكانيكية إلى تحول الطاقة الحركية إلى طاقة الوضع و العكس.