الدوال اللوغاريتمية

http://www.meljohra.ift.cx

07/06/2009

EL JOHRA MOHAMED

اَلدوال اللوغاريتمية

الحصة رقم 1

I. دالة اللوغاريتم النيبيري

1. نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

لماذا f تقبل دوال أصلية على المجال $]0,+\infty[$ ؟

2. الحل

3. تعريف

الدالة الأصلية للدالة $x \to \dfrac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النيبيري، و رمزها هو ln.

4. نتائج مباشرة

- **مجموعة تعريف الدالة ln هي $]0,+\infty[$**
- **الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و** $(\forall x \in]0,+\infty[);\ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$
- **الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.**
  أي : لكل a و b من $]0,+\infty[$ لدينا
  $$a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$$
  $$a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$$

5. إشارة الدالة ln

$$\ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$
$$\ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1$$
$$\ln(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

6. تمرين تطبيقي

1. **حل في IR المعادلة $(E) : \ln(2x)=\ln(x^2+1)$**
2. **حل في IR المتراجحة $(I) : \ln(x-1)-\ln(3x+1)<0$**

7. الحل

الحصة رقم 2

II. خصائص جبرية

1. نشاط

نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\ln(ax)-\ln(x)-\ln(a)$
حيث a بارامتر(عدد) حقيقي موجب قطعا.

1. بين أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$. و أن $F'(x)=0$ لكل x من $]0,+\infty[$.
2. استنتج أن $F(x)=0$ لكل x من $]0,+\infty[$.
3. استنتج نص الخاصية الجبرية الأساسية المحصل عليها

2. الحل

3. الخاصية الأساسية

لكل a و b من $]0,+\infty[$ لدينا $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

4. نشاط

1. لاحظ أن $(\forall a\in]0,+\infty[);\ a\times\frac{1}{a}=1$ و استنتج أن $(\forall a\in]0,+\infty[);\ \ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
2. احسب $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ بدلالة $\ln(a)$ و $\ln(b)$
3. بين بالترجع أن لكل $a>0$ لدينا: $(\forall n\in IN);\ \ln(a^n)=n\ln(a)$
4. استنتج أن لكل $a>0$ لدينا: $(\forall n\in Z^-);\ \ln(a^n)=n\ln(a)$
5. بين أن لكل $a>0$ لدينا: $(\forall n\in IN^*);\ \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\ln(a)$. لاحظ أن $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$
6. استنتج أن $(\forall r\in Q);\ \ln(a^r)=r\ln(a)$
7. أكتب نص الخاصيات المحصل عليها

5. خاصية

لكل a و b من $]0,+\infty[$ و لكل r من Q لدينا

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

$$\ln(a^r)=r\ln(a)$$

$$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln(a)$$

6. ملاحظة

إذا $xy>0$ فإن:

$$\ln(xy)=\ln|x|+\ln|y|$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln|x|-\ln|y|$$

إذا كان $x>0$ فإن: $\ln(x^2)=2\ln|x|$

الحصة رقم 3

7. **تمرين 1**

حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين المعرفتين ب : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ و $g(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$

8. **تمرين 2**

أكتب بدلالة ln2 و ln3 كل من الأعداد $\ln\left(12\sqrt[3]{3}\right)$ و $\ln\left(\dfrac{27}{16}\right)$ و $\ln 6$

9. **تمرين 3**

حل في IR المعادلات و المتراجحات التالية:

$$\ln(2x-1)-\ln(x)=0$$
$$\ln(x-1)^2=2\ln(3)$$
$$\ln(3x+2)<0$$
$$\ln(x+2)+\ln x\geq \ln 3$$

الحصة رقم 4

III. الدالة ln و النهايات

1. خاصية مقبولة

نقبل أن $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2. نتيجة

$$\lim_{x\to0+} \ln x = -\infty$$

3. برهان

لحساب $\lim_{x\to0+} \ln x = -\infty$ نضع $X = \frac{1}{x}$ عندما يؤول x إلى 0^+ فإن X يؤول إلى $+\infty$ و

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+} \ln x &= \lim_{X\to+\infty} \ln\frac{1}{X}\\ &= -\lim_{X\to+\infty} \ln X\\ &= -\infty\end{aligned}$$

4. نشاط

1. أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]1,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - \ln x$
2. استنتج أن $(\forall x > 1);\ 0 < \ln x < x$
3. بين أن $(\forall x > 1);\ 0 < \ln x < 2\sqrt{x}$
4. استنتج أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

5. الحل

6. خاصية

لدينا. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

الحصة رقم 5

IV. نهايات اعتيادية أخرى

1. خاصية

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} x^n \ln(x) = 0 \; ; \; (\forall n \in IN^*)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0 \; ; \; (\forall n \in IN^*)$$

2. برهان

3. تمرين

أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ و $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}+\ln x$ و $\lim_{x\to x} x(\ln x)^2$ و $\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^3}{x}$

4. الحل

الحصة رقم 6

V. دراسة الدالة ln

1. العدد e

لدينا الدالة ln متصلة و تزايدية قطعا من]0,+∞[نحو ln(]0,+∞[)=IR
حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة lnx=1 تقبل حلا وحيدا في المجال]0,+∞[. نرمز له بالرمز e

2. تمرين تطبيقي

بين أن $(\forall x>0);(\forall r\in Q);\quad \ln x = r \Leftrightarrow x = e^{r}$

حل في IR المعادلة $\ln(2x-1)=\dfrac{3}{2}$

حل في IR المتراجحة ln(-x+3)>2

3. الحل

4. ملاحظة

لكل r عدد جذري لدينا $\ln(e^{r})=r$.

جدول التغيرات

X	0		1		e		+∞
Ln'(x)				+			
ζln	-∞	↗	0	↗	1	↗	+∞

5. الفروع اللانهائية

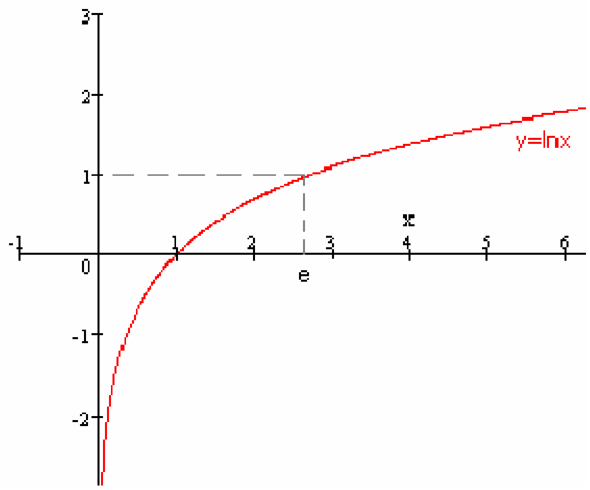
لدينا $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ **إذن منحنى الدالة ln يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار +∞**

لدينا $\lim_{x\to 0+}\ln x=-\infty$ **إذن محور الأراتيب مقارب لمنحنى الدالة ln .**

6. منحنى الدالة ln

معادلة مماس المنحنى (ζln) في النقطة A(1,0) هي $(T_A): y=x-1$

معادلة مماس المنحنى (ζln) في النقطة B(e,1) هي $(T_B): : \; y=\dfrac{1}{e}x$



http://www.meljohra.ift.cx
meljohra@gmail.com

الحصة رقم 7

VI. المشتقة اللوغاريتمية لدالة

1. نشاط

2. خاصية 1

نضع f الدالة المعرفة ب: $f(x)=\ln|u(x)|$.

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على I ، فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة هي المشتقة اللوغاريتمية للدالة u أي: $(\forall x\in I);\ f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

3. تعريف

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على I : $(\forall x\in I);u(x)\neq 0$

الدالة $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ (حيث u' هي الدالة المشتقة للدالة u) تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I.

4. مثال

لنحدد الدالة المشتقة اللوغاريتمية للدالة u المعرفة ب : $u(x)=3x^2+5$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على IR و لا تنعدم على IR

لدينا $u'(x)=6x$ لكل x من IR. إذن المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على IR هي $x\to\dfrac{6x}{3x^2+5}$

5. خاصية 2

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I.

الدوال الأصلية للدالة : $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال : $x\to\ln|u(x)|+c$ حيث c ثابتة حقيقية

6. أمثلة

الدوال الأصلية للدالة المعرفة ب $f(x)=\dfrac{2}{2x+1}$ على المجال $I=\left]-\infty,\dfrac{-1}{2}\right[$ هي الدوال المعرفة ب:

$F(x)=\ln|2x+1|+c\ ;c\in IR$

الدوال الأصلية للدالة $x\to\tan(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ على المجال $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ هي الدوال المعرفة ب:

$\ln|\cos x|+c\ ;c\in IR$.

7. **تمرين 1**

حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالتين:

$$I = IR; \quad f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$$

$$I =]0,1[\quad f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

الحصة رقم 8

8. تمرين 2 : عن دورة يونيو 2006

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ ب: $g(x)=\ln(x+1)-x$.

1. **أحسب $g'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم بين أن g تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.**
2. **استنتج أن** $g(x)\le 0 \quad (\forall x\in[0,+\infty[)$
3. **بين أن : $0<\ln(x+1)<x$ لكل x من $[0,+\infty[$.**

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ **و (ζf) منحناها في م م م.**

4. **بين أن حيز تعريف الدالة f هو** $Df=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$
5. **بين أن الدالة f فردية**
6. **أحسب النهايتين** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to1+} f(x)$
7. **بين أن :** $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$, $(\forall x\in Df)$ **و استنتج تغيرات f على المجال $]1,+\infty[$**
8. **تحقق من أن المستقيم (Δ) الذي معادلته y=x مقارب مائل للمنحنى (ζf).**
9. **ادرس إشارة** $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ **يمكنك ملاحظة أن :** $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$, $(\forall x\in Df)$
10. **استنتج الوضع النسبي للمنحنى (ζf) و المستقيم (Δ).**
11. **أنشئ (ζf) في المعلة المتعامدة الممنظم** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **(خذ** $\sqrt{3}\approx1,7$ **و** $f(\sqrt{3})\approx 3$ **)**

9. الحل

الحصة رقم 9

VII. دالة اللوغاريتم للأساس a

1. تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا ل 1

دالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز $\log_a$ و المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$$

2. نتائج

$\log_a(a)=1$ ، $\log_a(e)=\frac{1}{\ln a}$ ، $\log_a(1)=0$ ، $\log_e(x)=\ln x$ لكل x من $]0,+\infty[$

دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e.

3. خاصيات

الدالتين ln و $\log_a$ لهما نفس الخاصيات الجبرية

$(\forall x>0)(\forall y>0)$ و $\left(\forall a\in IR^{*+}-\{1\}\right)$ و $(\forall r\in Q)$ لدينا

$$\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$$

$$\log_a\left(x^r\right)=r\log_a(x)$$

4. دالة اللوغاريتم العشري

a. تعريف

دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس 10 و تكتب log عوض $\log_{10}$. أي

$$(\forall x>0)\quad \log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

5. دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

الدالة $\log_a$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و $(\forall x>0)\ (\log_a)'(x)=\frac{1}{x\ln a}$ و منه إشارة $\log_a'(x)$ على $]0,+\infty[$ هي إشارة ln(a) ومنه الحالتين:

<u>الحالة الأولى:</u>

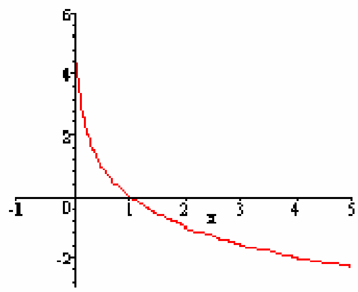
0<a<1		
x	0	$+\infty$
$\text{Log}_a'(x)$	-	
$\log_a$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

الحالة الثانية:

a>1		
x	0	+∞
$Log_a'(x)$	+	
log_a	-∞ ↗	+∞

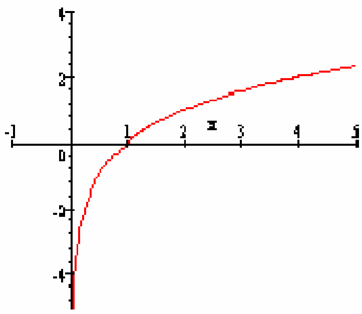
الحالة $0<a<1$

التمثيل المبياني $a=\frac{1}{2}$



الحالة $a>1$

التمثيل المبياني $a=2$



الحصة رقم 10

6. تمرين تطبيقي
   1. حل في IR المعادلتين:
      a. $Log_3(2x-1)=1+log_3(x)$
      b. $Log(x)+1=log(x+3)$
   2. حل في IR المتراجحتين:
      a. $Log(3x-2)<log(x+3)$
      b. $Log_{1/2}(2x+1)\geq log_{1/2}(x+4)$
7. الحل