المستوى: 2Bac PC+SVT	الدوال اللوغارتمية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات: 10	Fonctions logarithmiques	الأستاذ : محمد إعلو

الدوال اللوغارتمية

أهداف الدرس

➢ التمكن من دالة اللوغاريتم النبيري ➢ معرفة الخاصيات الجبرية لدالة اللوغاريتم النبيري ➢ التمكن من دراسة دالة اللوغاريتم النبيري ➢ التعرف على نهايات اللوغاريتم الأساسية ➢ معرفة المشتقة اللوغارتمية لدالة و مشتقة الدالة $x \mapsto ln\|u(x)\|$	➢ التمكن من تحديد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ ➢ التعرف على دالة اللوغاريتم للأساس a. ➢ توظيف الدوال اللوغارتمية في مواد أخرى من مواد التخصص.

القدرات المنتظرة

- التمكن من الحسابات الجبرية اللوغاريتمات
- التمكن من حل معادلات و متراجحات و نظمات لوغاريتمية
- معرفة اللوغاريتم العشري و تطبيقاته (حل المعادلات من النوع $10^x = a$)
- التمكن من النهايات اللوغاريتمية الأساسية و توظيفها.
- التمكن من دراسة و تمثيل دوال تحتوي على دوال لوغاريتمية .

الامتدادات

الحساب التكاملي	علوم الحياة و الأرض
الفيزياء و الكيمياء	العلوم الاقتصادية
الإحصاء و الاحتمالات	الحسابات الجبرية

فقرات الدرس

- دالة اللوغاريتم النبيري
- دراسة دالة اللوغاريتم النبيري
- نهايات اعتيادية أخرى
- المشتقة اللوغاريتمية لدالة
- دالة اللوغاريتم للأساس a
- دالة اللوغاريتم العشري
- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

I)- دالة اللوغاريتم النبيري Fonction logarithme népérien

الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ متصلة على المجال $]0,+\infty[$ ، إذن تقبل دوال أصلية على المجال $]0,+\infty[$ ،
و تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم في 1.

تعريف

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1.
و نرمز لها بالرمز: ln.

نتائج

- مجموعة تعريف الدالة ln هي المجال $]0,+\infty[$.
- $ln\,1=0$
- الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x\in]0,+\infty[,(ln\,x)'=\frac{1}{x}$
- الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$. أي: $\forall a,b\in]0,+\infty[,a<b\Leftrightarrow ln\,a<ln\,b$.
- $\forall a,b\in]0,+\infty[,ln\,a=ln\,b\Leftrightarrow a=b$.
- $ln\,x=0\Leftrightarrow x=1$ و $ln\,x>0\Leftrightarrow x>1$ و $ln\,x<0\Leftrightarrow 0<x<1$.

أمثلة

- حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$f:x\mapsto \frac{x}{ln\,x}$ $\qquad$ $g:x\mapsto\sqrt{(x-1)ln\,x}$ $\qquad$ $h:x\mapsto ln\,ln\,x$.

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$ln\,2x=ln(x^2+1)$ $\qquad$ $ln(x-1)-ln(3x+1)=0$ $\qquad$ $ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=0$

- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$ln(3x+2)<0$ $\qquad$ $ln(x-1)<ln(2x-1)$ $\qquad$ $ln\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\geq 0$

خاصيات جبرية

الخاصية الأساسية

لكل a و b من المجال $]0,+\infty[$ ، لدينا: $ln(ab)=ln\,a+ln\,b$

برهان

نضع : $\forall x>0,F(x)=ln(kx)$ و $\forall x>0,u(x)=kx$ ، حيث $k\in\mathbb{R}_+^*$.
لدينا : $\forall x>0,F(x)=ln\circ u(x)$ إذن F قابلة للاشتقاق عل المجال $]0,+\infty[$ و لدينا:

$$\forall x>0,F'(x)=ln'(u(x))\times u'(x)=\frac{1}{x}$$

إذن $\exists c\in\mathbb{R}/\ F(x)=ln\,x+c$ و من أجل $x=1$ ، $ln\,k=c$.
ومنه $ln(kx)=ln\,x+ln\,k$.
إذا وضعنا: $x=a$ و $k=b$ فإن: $ln(ab)=ln\,a+ln\,b$.

ملاحظة

نبين بالترجع أن: $\sum_{i=1}^{i=n} ln(a_i) = ln\left(\prod_{i=1}^{i=n} a_i\right)$ حيث a_1 و a_2 و...و a_n أعدادا حقيقية موجبة قطعا.

خاصية

لكل a و b من المجال $]0,+\infty[$ ، و لكل r من $\mathbb{Q}$ ، لدينا:

1- $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln\,a$ 2- $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\,a - ln\,b$

3- $ln\left(a^r\right) = r\,ln\,a$ 4- $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}ln\,a$

برهان

1- لدينا: $ln\,a + ln\frac{1}{a} = ln\left(a\times\frac{1}{a}\right) = ln\,1 = 0 , \forall a > 0$ و منه $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln\,a$.

2- لدينا: $ln\,a + ln\frac{1}{b} = ln\,a - ln\,b$ $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) =$ لكل a و b من $\mathbb{R}_+^*$.

3- إذا كان $r = n \in \mathbb{N}$: $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$ و نحصل على: $ln\,a^n = n\,ln\,a$

إذا كان $r = -n \in \mathbb{Z}^-$: $\forall a > 0 , ln\,a^r = ln\frac{1}{a^n} = -ln\,a^n = -n\,ln\,a^n = r\,ln\,a$

إذا كان $r = \frac{p}{q}$: $\forall a >,q\,ln\,a^r = ln\,a^{qr} = ln\,a^p = p\,ln\,a$ إذن $\forall a > 0 , ln\,a^r = r\,ln\,a$

ملاحظة

- إذا كان $xy > 0$ فإن: $ln(xy) = ln|x| + ln|y|$ و $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln|x| - ln|y|$ و $ln\,x^2 = 2\,ln|x|$
- لكل x من المجال $]0,+\infty[$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا: $ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}ln\,x$.

أمثلة

- بسط العدد: $A = ln\sqrt{2-\sqrt{2}} + ln\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
- $B = ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2009} + ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2009}$
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $ln(-x+3) = 2$ ثم المتراجحة: $ln(-x+3) \geq 2$

II)- دراسة دالة اللوغاريتم النبيري

مجموعة تعريف الدالة ln هي المجال $]0,+\infty[$.

1)- نهايات اعتيادية

خاصية

$\lim_{x\to+\infty} ln\,x = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} ln\,x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0$

ملاحظة

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} ln\,x = -\lim_{x\to 0^+} ln\frac{1}{x} = -\lim_{x\to+\infty} ln\,x = -\infty$.

2)- جدول تغيرات الدالة ln

الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا : $\forall x>0,(ln)'(x)=\frac{1}{x}>0$

x	0		1		$+\infty$
$(ln)'(x)$	‖	$+$		$+$	
$ln\,x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3)- الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة ln

- لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^+} ln\,x=-\infty$ إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لمنحنى الدالة ln.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{x}=0$ إذن منحنى ln يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

4)- العدد e

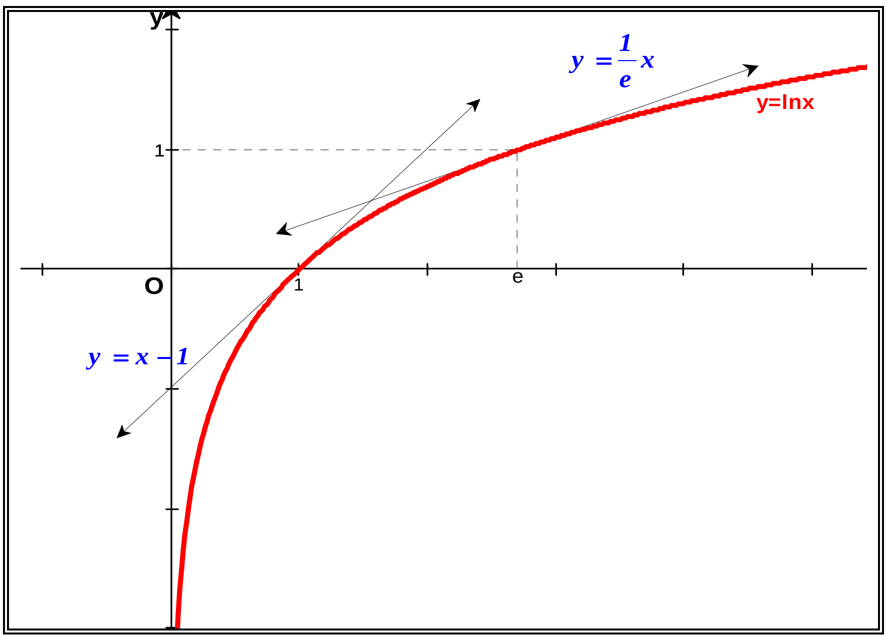
- الدالة ln متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

  إذن: $ln(]0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+} ln\,x,\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x\right[=]-\infty,+\infty[$.
- و بما أن $1\in]-\infty,+\infty[$ فإن المعادلة $ln\,x=1$ تقبل حلا و حيدا في المجال $]0,+\infty[$ يرمز له بالحرف e.

  و لدينا : $ln\,e=1$ و $e\notin\mathbb{Q}$ و $e\approx 2.718$.
- $\forall x>0,\forall k\in\mathbb{Q},ln(e^k)=k$ و $\forall x>0,\forall k\in\mathbb{Q},ln\,x=k\Leftrightarrow x=e^k$.
- $\forall x>0,\forall k\in\mathbb{Q},ln\,x\le k\Leftrightarrow x\le e^k$

5)- منحنى الدالة ln

- معادلة مماس منحنى الدالة ln في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y=x-1$.
- معادلة مماس منحنى الدالة ln في النقطة التي أفصولها e هي : $y=\frac{1}{e}x$.



تمرين01

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x-\ln x$

1)- حدد D_f ثم أحسب النهايات عند محدات D_f.

2)- أدرس تغيرات الدالة f

3)- أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.

4)- أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

III)- نهايات اعتيادي أخرى

خاصية

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to0^+} x^n\ln x=0 \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$$

برهان

❖ $\lim_{x\to0^+} x\ln x=-\lim_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}$.

❖ $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\ln'(1)=1$.

❖ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln'(1)=1$.

❖ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to0^+} x^n\ln x=\frac{1}{n}\lim_{x\to0^+}\left(x^n\ln x^n\right)=\frac{1}{n}\lim_{t\to0^+} t\ln t=0$.

❖ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\frac{1}{n}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x^n}{x^n}\right)=\frac{1}{n}\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$.

أمثلة

أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ و $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}+\ln x\right)$ و $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(x-(\ln x)^2\right)$ و $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ و $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{2}{3}}\ln x$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}}}{x}$.

تمرين02

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي: $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

1)- أ- أحسب u_1 و u_2 . ب- أحسب $u_{n+1}-u_n$ و استنتج رتابة $(u_n)_{n\geq1}$.

2)- نضع : $s_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$

أحسب s_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

III)- المشتقة اللوغاريتمية لدالة. La dérivée logarithmique d'une fonction

نشاط

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على المجال I، و لا تنعدم على المجال I.

لدينا: u قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذن u دالة متصلة على I . و بما أن u لا تنعدم على I، فإن u تحتفظ بنفس الإشارة على المجال I .

نضع : $f(x)=\ln(|u(x)|)$.

- إذا كانت u موجبة قطعا على المجال I فإن:

لدينا: $\forall x\in I, f(x)=\ln\circ u(x)$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على I و $u(I)\subset]0,+\infty[$،

و $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x\in I, f'(x)=\ln'(u(x))\times u'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

- إذا كانت u سالبة قطعا على المجال I فإن:

لدينا: $\forall x\in I, f(x)=\ln\circ(-u(x))$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على I و $-u(I)\subset]0,+\infty[$

و $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x\in I, f'(x)=-\ln'(-u(x))\times u'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

خاصية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و لا تنعدم على المجال I، فإن الدالة $x\mapsto \ln(|u(x)|)$ قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة على I هي الدالة: $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

أمثلة

حدد $f'(x)$ لكل x من المجال I في الحالات التالية:

1)- $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ و $I=]-\infty,+\infty[$.

2)- $f(x)=\ln|1-\ln x|$ و $I=]e,+\infty[$.

تعريف

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و لا تنعدم على المجال I.

الدالة: $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

خاصية

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و لا تنعدم على المجال I .

الدوال الأصلية للدالة: $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال: $x\mapsto \ln(|u(x)|)+c$ حيث $(c\in\mathbb{R})$

أمثلة

- الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{1}{2x+1}$ على المجال $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$ هي الدوال: $x\mapsto \dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+c$، $(c\in\mathbb{R})$
- الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \tan x$ على المجال $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ هي الدوال $x\mapsto -\ln|\cos x|+c$، $(c\in\mathbb{R})$.

تمرين03

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]2,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\frac{x^2}{4-x}$.

1)- حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث: $\forall x\in]2,+\infty[,f(x)=a+\frac{b}{2-x}+\frac{c}{2+x}$

2)- استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]2,+\infty[$.

تمرين04

حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في الحالات التالية:

1)- $f(x)=\frac{x^3}{x^4+1}$ و $I=]-\infty,+\infty[$.

2)- $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ و $I=]0,1[$

تمرين05

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\ln(\ln x)$.

1)-أثبت أن حيز تعريف الدالة f هو $D_f=]1,+\infty[$.

2)-أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

3)-أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f .

4)-أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

تمرين06

نعتبر الدالتين العدديتين u و f للمتغير الحقيقي x المعرفتين بما يلي:

$u(x)=x^2-2x+3$ و $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$.

1)-أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R},u(x)>0$ و استنتج أن : $D_f=]-\infty,+\infty[$

ب- أحسب : $u(1+\sqrt{2})$ و $u(1-\sqrt{2})$.

2)- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3)- أحسب f′(x) ثم أدرس تغيرات الدالة f .

4)- بين أن المستقيم ذو المعادلة " $x=1$ " محور تماثل لمنحنى الدالة f .

5)-أ- أثبت المتساوي التالية : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\frac{f(x)}{x}=2\frac{\ln(|x|)}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x}$.

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين لمنحنى الدالة f.

6)-أ- بين أن منحنى الدالة f يقبل نقطتي انعطاف ثم حدد إحداثي كل منهما .

ب- أرسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

7)- لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$.

أ- بين أن الدالة g تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- حدد تعبير $g^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من J.

(ناخذ : $\ln 2\approx 0.7$ و $\ln 3\approx 1.1$)

V)- دالة اللوغاريتم للأساس a حيث ($a>0$ و $a\neq 1$): Fonction logarithme de base a

1)- تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد 1
دالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة العددية التي يرمز لها بالرمز Log_a و المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $Log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

2)- نتائج

$$Log_a(1)=0 \qquad Log_a(a)=1 \qquad Log_a(e)=\frac{1}{\ln a}$$

$\forall x>0, Log_e(x)=\dfrac{\ln x}{\ln e}=\ln x$ ومنه $\ln = Log_e$.

خاصية

لكل x و y من المجال $]0,+\infty[$ ، و لكل r من $\mathbb{Q}$ ، لدينا:

1)- $Log_a(xy)=Log_a(x)+Log_a(y)$

2)- $Log_a\left(\dfrac{1}{x}\right)=-Log_a x$

3)- $Log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y)$

4)- $Log_a(x^r)=rLog_a x$

أمثلة

بسط ما يلي:

$$A=Log_2\left(\frac{1}{5}\right)+Log_2(10) \qquad B=Log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$$

3)- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

الدالة Log_a قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا : $\forall x>0, (Log_a)'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

و منه نستنتج الجدولين التاليين :

حالة $a>1$

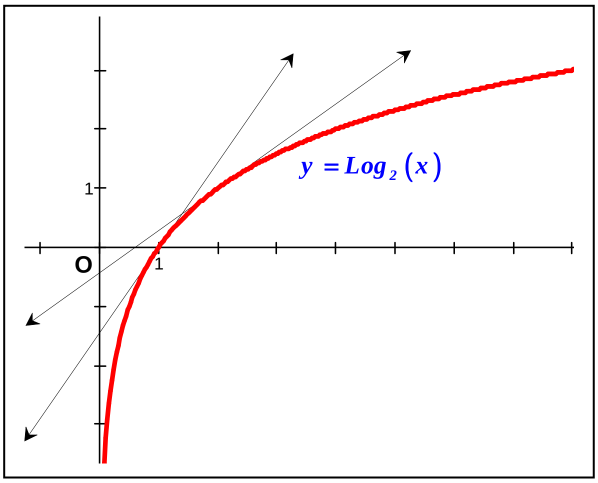
x	0		1		a		$+\infty$
$(Log_a)'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$Log_a(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

حالة $0<a<1$

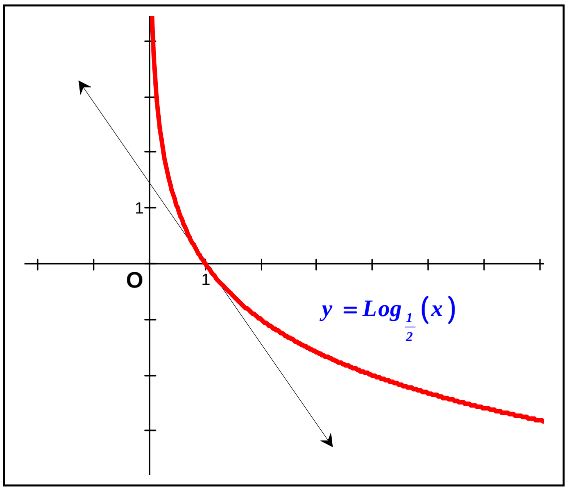
x	0		a		1		$+\infty$
$(Log_a)'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$Log_a(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

4)- إنشاء منحنى الدالة Log_a

حالة $a > 1$



حالة $0 < a < 1$



VI)- دالة اللوغاريتم العشري Fonction logarithme décimal

تعريف

دالة اللوغاريتم العشري هي دالة اللوغاريتم للأساس 10 و يرمز لها بالرمز log عوض Log_{10}

و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, log(x) = \dfrac{ln\, x}{ln\, 10}$.

نتائج

$log(1) = 0$ $\quad$ $log(10) = 1$ $\quad$ $\forall r \in \mathbb{Q}, log(10^r) = r$

لدينا: $log\, x = M\ ln\, x$ حيث $M \approx 0.43294481...$

مثال

بسط : $A = log(250000) + log\sqrt{250} + -log(125)$.

تمرين07

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + ln\, x}{x - ln\, x}, x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$.

1)-أ- بين أن $D_f = [0,+\infty[$ ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا.

ب- بين أن الدالة f متصلة في الصفر على اليمين.

2)- أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر على اليمين ثم أول النتيجة هندسيا.

ب- بين أن : $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = \dfrac{2(1 - ln\, x)}{(x - ln\, x)^2}$.

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f.

4)- أ- بين أن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

ب- أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم.(نأخذ $ln\, 2 \approx 0.7, e \approx 2.7$).