I- دالة اللوغاريتم النبيري:

1)- تعريف و نتائج:

الدالة $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ متصلة على المجال $]0,+\infty[$ ، إذن فهي تقبل دوالا أصلية على هذا المجال ، هذه الدوال تسمى الدوال اللوغاريتمية .

■ **خاصية و تعريف:**

توجد دالة أصلية و حيدة F للدالة : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ بحيث $F(1)=0$ ، وتسمى دالة اللوغاريتم النبيري و يرمز لها ب $\ln$ ، إذن :

$$\ln : \begin{vmatrix}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \ln 1 = 0$$

و $\forall x \in]0,+\infty[: (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

■ **إستنتاج:**

-- لدينا ، $\forall x \in]0,+\infty[: (\ln x)' \succ 0$ ،

إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ ،

و بالتالي : $\forall x \in]0,1[: \ln x \prec 0$

و $\forall x \in]1,+\infty[: \ln x \succ 0$.

-- و من جهة أخرى ، $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} :$

$$\begin{cases} \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \\ \ln x \prec \ln y \Leftrightarrow x \prec y \end{cases}$$

■ **خاصية أساسية:**

لكل y من $]0,+\infty[$ ، الدالة $G : x \mapsto \ln(x.y)$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا :

$\forall x \in]0,+\infty[: G'(x) = \frac{1}{x}$.

■ **نتائج:**

-- **نتيجة01:**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} : \ln(x.y) = \ln x + \ln y$$

و بصفة عامة ،

$\forall (x_1,x_2,....,x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n} :$

$$\ln(x_1 \times x_2 \times ... \times x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n$$

-- **نتيجة02:**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} : \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

و بصفة خاصة : $\forall x \succ 0 : \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

■ **ملحوظة:** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} / x.y \succ 0 :$

$$\begin{cases} \ln(x.y) = \ln|x| + \ln|y| \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y| \end{cases}$$

-- **نتيجة03:** $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[:$

$\ln(x^n) = n.\ln x$ و $\ln(x^{-n}) = -n.\ln x$

و $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}.\ln x$.

و بصفة عامة : $\forall r \in \mathbb{Q}^* : \ln(x^r) = r.\ln x$.

2)- تطبيقات:

■ **تمرين01:**

أ)- عبر عن العددين A و B بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$ حيث :

$$A = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{\sqrt{5}-1}\right)$$

$$B = \ln\left(3+\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right) + \ln\left(6+2\sqrt{3}\right) + \ln\left(3-\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right)$$

ثم اعط قيمة مقربة لكل منهما إذا علمت أن: $\ln 2 \simeq 0,7$ و $\ln 3 \simeq 1,1$.

ب)- حل في $\mathbb{R}$ ما يلي :

$(1) : \ln(x^2-1) = \ln 2x$

و $(2) : \ln(x-2) \le \ln(2x-1)$

و $(3) : \ln x + \ln(x+3) - 2\ln 2 = 0$

و $(4) : \ln(3-x) + \ln 2 - \ln(x+1) \ge 0$

■ **تمرين02:** حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) التالية :

$$2\ln(2x-1) - \ln(3x-2x^2) = \ln(4x-3) - \ln x$$

و المتراجحة: $\ln(x+3) \ge \ln(x^2+2x-3) - \ln x$

3)- دراسة دالة اللوغاريتم النبيري:

-- دالة اللوغاريتم النبيري معرفة على $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ و هي متصلة و قابلة للإشتقاق على هذا المجال ، و لدينا:

$$\forall x \in]0,+\infty[: (\ln x)' = \frac{1}{x} \succ 0$$

إذن فهي تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

-- **تحديد النهايتين:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ ،

ليكن n من $\mathbb{N}$ و x من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث $x \geq 2^n$ ،

لدينا : $\ln x \geq \ln 2^n$ أي $\ln x \geq n.\ln 2$

و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n.\ln 2 = +\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right)$

$$= -\lim_{t\to+\infty} \ln(t) = -\infty$$

و بالتالي فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

-- **مبرهنة01:** الدالة $\ln$ متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ ، إذن فهي تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

(لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$)

-- **العدد e :**

بما أن الدالة $\ln$ تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ فالمعادلة $\ln x = \lambda$ ، تقبل حلا وحيدا مهما يكن λ من $\mathbb{R}$.

-- **تعريف:** المعادلة $(E): \ln x = 1$ تقبل حلا و حيدا في المجال $]0,+\infty[$ يرمز له بالرمز **e** .

و يسمى أساسا للوغاريتم النبيري ، و **e** عدد لا جذري و $e \simeq 2,718.281.828.5...$.

نلخص تغيرات الدالة $\ln$ في الجدول التالي :

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ e $\quad$ $+\infty$
$\ln x$	$-\infty \nearrow +\infty$

-- **دراسة الفروع اللانهائية:**

بما أن $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ ، فإن (oy) مقارب رأسي لمنحنى الدالة $\ln$.

■ تمرين03:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$

أ)- أدرس تغيرات الدالة f ، ثم إستنتج أن :

$$\forall x \in [1,+\infty[: 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} .$$

ب)- إستنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

-- **دراسة التحدب:**

لدينا : $\forall x \in]0,+\infty[: (\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \prec 0$

إذن منحنى الدالة $\ln$ مقعر على المجال $]0,+\infty[$.

-- **إنشاء المنحنى:**

■ تمرين04:

أ)- حدد النهايات التالية : $(1): \lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$

و $(2): \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ و $(3): \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

ب)- حدد النهايتين : $(4): \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n}$

و $(5): \lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

نهايات مرجعية

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

■ تمرين05:

أ)- أحسب النهايات التالية : $(1): \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$(2): \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} \ln x$ و $(3): \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$

$(4): \lim\limits_{x\to 0^+} x (\ln x)^2$ و $(5): \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x}$

$(7): \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\ln(e.x)}}{x}$ و $(6): \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

. $(8): \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln x - \ln^2(\ln x)\right]$

4)- المشتقة اللوغاريتمية:

-- مبرهنة02:

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I و لا تنعدم في كل نقطة من I ، فإن الدالة : $x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للإشتقاق على I و لدينا :

. $\forall x \in I : \left[\ln|u(x)|\right]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

-- إستنتاج: إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I و لا تنعدم في كل نقطة من I ، فمجموعة الدوال الأصلية على I للدالة : $f : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ هي : $F_\lambda : x \mapsto \lambda + \ln|u(x)|$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

-- مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على المجال $]-\infty,0[$ هي $x \mapsto \lambda + \ln(-x)$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

■ **تمرين06:** نعتبر الدوال العددية u و f و g المعرفة بما يلي : $u(x) = \dfrac{3x+1}{5x+2}$

$f(x) = \ln[u(x)]$ و $g(x) = \ln|u(x)|$

أ)- حدد D_f و D_g ، ثم أحسب مشتقتي f و g .

ب)- حدد الدالة الأصلية للدالة h و التي تنعدم في 0 ، حيث : $h : x \mapsto \dfrac{3}{3x+1} - \dfrac{5}{5x+2}$.

■ **تمرين07:** أوجد دالة أصلية F للدالة f على المجال I في الحالات التالية :

$(1): \begin{cases} f(x) = \tan x \\ I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$ و $(2): \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\tan x} \\ I = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\end{cases}$

$(3): \begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2}{x+1} \\ I =]-\infty,-1[\end{cases}$ و $(4): \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x\ln x} \\ I =]0,1[\end{cases}$

II- تطبيقات:

■ **تمرين08:** نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} \\ g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1) \end{cases}$$ ،

1)- أ- حدد النهايتين: $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- حدد g' مشتقة الدالة g .

ج- حل المتراجحة : $\ln(x-1) \le 1$ ، ثم أنشيء جدول تغيرات الدالة g .

د- بين أن (C_g) يقطع (ox) في نقطة وحيدة أفصولها α عنصر من المجال $]1+e^2, 1+e^3[$ ، ثم اعط جدولا لإشارة الدالة g على المجال $]1,+\infty[$.

2)- أ- أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن :

$$\forall x \in]1,+\infty[: sg\left[f'(x)\right] = sg\left[g(x^2)\right]$$

ثم إستنتج تغيرات الدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

■ **تمرين09:**

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2\sqrt{|\ln x|} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$.

1)- أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

و $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها .

2)- أدرس قابلية إشتقاق f عند $x_0 = 1$.

3)- أحسب $f'(x)$ على كل مجال من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ، ثم أدرس إشارتها و أنشيء جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$.

4)- أنشيء (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

■ **تمرين10**: (متتالية عددية تؤول إلى العدد e)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

1)- أثبت أن:

$$\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[:\ln(1+x)\prec x \text{ ،}$$

ثم إستنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n\prec e$.

2)- أ- تحقق من أن:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) .$$

ب- إستنتج أن:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \begin{cases}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\succ\frac{1}{n+1}\\ u_n\succ e^{\frac{n}{n+1}}\end{cases}$$

3)- بين أن:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \begin{cases}e^{\frac{n}{n+1}}\succ\frac{ne}{n+1}\\ 0\prec e-u_n\prec\frac{e}{n}\end{cases}$$

ثم إستنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

III- دالة اللوغاريتم للأساس a ، $a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$

1)- **تعريف:** ليكن a عددا من $\mathbb{R}_+^*-\{1\}$ ،

دالة اللوغاريتيم للأساس a هي الدالة $\log_a$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$ ،

بصفة خاصة : $\forall x\in]0,+\infty[:\log_e x=\ln x$

2)- **خاصيات:** لدينا ،

$$-\forall(a,r)\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\times\mathbb{Q}^*: \begin{cases}\log_a a=1\\ \log_a(a^r)=r\end{cases}$$

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}: \begin{cases}\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y\\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y\\ \log_a(x^r)=r\log_a x\end{cases}$$

3)- **دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a:**

الدالة $\log_a$ متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا،

$$\forall x\in]0,+\infty[:(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

إذن تغيراتها مرتبطة بإشارة العدد $\ln a$ ، هناك حالتين:

- إذا كان $a\in]0,1[$ فإن الدالة $\log_a$ تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

- إذا كان $a\in]1,+\infty[$ فإن الدالة $\log_a$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

-- **بالنسبة للنهايات:** لدينا ،

$$a\in]0,1[\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\log_a x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty\end{cases}$$

و

$$a\in]1,+\infty[\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\log_a x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty\end{cases}$$

-- **التمثيل المبياني:** $a=\frac{1}{2}$ و $a=2$.

4)- **اللوغاريتم العشري:**

-- **تعريف:**

دالة اللوغاريتم العشري هي الدالة $\log_{10}$ و يرمز لها فقط بالرمز $\log$ عوض $\log_{10}$ ، إذن :

$$\forall x\in]0,+\infty[:\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

و $\forall n\in\mathbb{Z}:\log(10^n)=n$

■ **تمرين11:**

1)- حل في $\mathbb{N}$ المتراجحة: $(I):\left(\frac{1}{10}\right)^{2^n}\prec10^{-100}$

2)- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$(E):\log(x-2)+\log(x+3)=2$$

3)- حل في $\mathbb{R}^2$ النظمتين:

$$(1):\begin{cases}x+y=65\\ \log x+\log y=3\end{cases}$$

و

$$(2):\begin{cases}\log|x-1|+\log(y+1)=1\\ xy+x+y=1\end{cases}$$