الدوال اللوغاريتمية

1. تعريف :

الدالة الأصلية للدالة : $x \to \frac{1}{x}$ **على المجال** $]0;+\infty[$ **التي تنعدم في** 1 **تسمى الدالة اللوغارتمية النبيرية ويرمز لها بالرمز** $\ln$ **أو** $\log$

$$\ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \succ 0 \\ (\ln(x))' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$$

2. خصائص:

مجموعة تعريف الدالة ln هي $]0;+\infty[$ $\ln(1)=0$

الدالة ln متصلة على $]0;+\infty[$

الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in]0;+\infty[$

الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

لدينا : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{*}_{+}$

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(x) \succ \ln(y) \Leftrightarrow x \succ y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$r \in \mathbb{Q} \quad \ln(x)^r = r\ln(x)$$

ملاحظة

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln x \succ 0 \Leftrightarrow x \succ 1$$

$$\ln x \prec 0 \Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$$

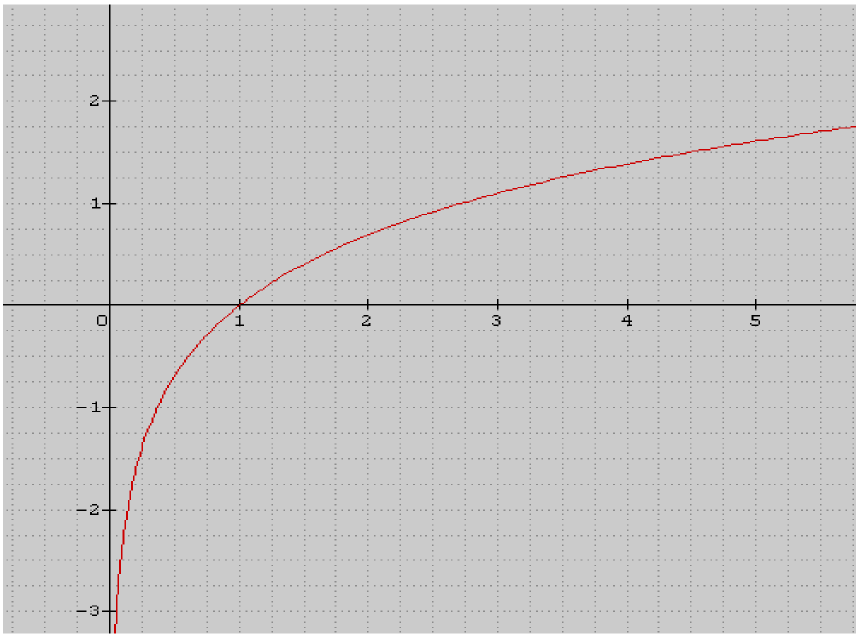
لدينا الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ ومتصلة و $\ln(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$ و منه المعادلة $\ln x=1$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ ويرمز له بالحرف e اذن $\ln e=1$

نقبل أن e ليس عددا جذريا و قيمته المقربة هي $e\simeq 2{,}71828$

اذن جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية

x	0	1	e	$+\infty$
f	$-\infty$	0	1	$+\infty$

منحنى الدالة ln



www.bramaths.com Brahim Ajghaider

3. المشتقة :

f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث $f(x) \neq 0$ ؛

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad [\ln(f(x))]' = \frac{f(x)'}{f(x)}$$

4 . النهايات ؛

الدالة $\ln$ دالة متصلة وتزايدية على $]0;+\infty[$ ؛

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty ; \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +1} \frac{\ln(x)}{x \to 1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty$$

5 . الدالة اللوغاريتمية للأساس a

✓ لكل $a \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\}$ الدالة $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ المعرفة على $]0;+\infty[$ تسمى **دالة اللوغاريتم للأساس** a ويرمز لها بالرمز $\log_a$

إذا كان $a = e$ فان الدالة اللوغاريتم للأساس e هي دالة **اللوغاريتم النبيري**.

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad Log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

إذا كان $a = 10$ فان الدالة تسمى دالة **اللوغاريتم العشري**.

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad \log x = Log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

- جميع خصائص دالة اللوغاريتم النبيري تبقى صالحة لدالة اللوغاريتم للأساس a

$$\log_{a,}(a) = 1 \qquad ; \log_a(1) = 0$$

$$\forall (x;y) \in (]0;+\infty[)^2 \qquad \forall r \in \mathbb{Q} \qquad Log_a(xy) = Log_a(x) + Log_a(y)$$

$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right) = Log_a(x) - Log_a(y) \quad ; \quad Log_a(x^r) = rLog_a(x)$$

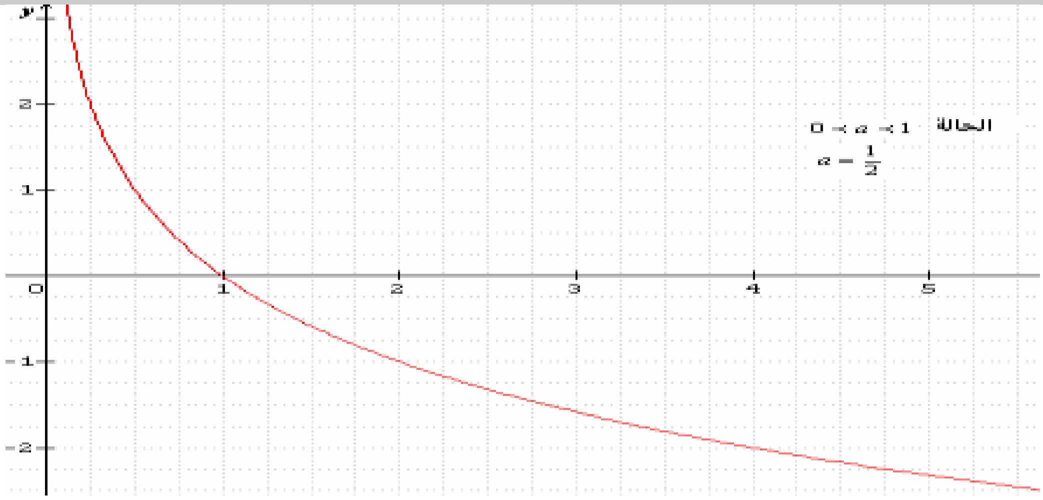
6. دراسة الدالة اللوغاريتمية للأساس a

لدينا $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad Log_a{}'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$

الحالة الأولى

اذا كان $0 \prec a \prec 1$ فان $\ln a \prec 0$ و منه $Log_a{}' \prec 0$ $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$ اذن Log_a تناقصية قطعا على $\left]0;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to 0^+} Log_a x = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} Log_a x = -\infty$$



الحالة الثانية

اذا كان $a \succ 1$ فان $\ln a \succ 0$ و منه $Log_a{}' \succ 0$ $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$ اذن Log_a تزايدية قطعا على $\left]0;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to 0^+} Log_a x = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} Log_a x = +\infty$$