http://www.meljohra.ift.cx

الجداء المتجهي

12/06/2009

الجحرة محمد

الجداء المتجهي

3

الحصة رقم 1

I. توجيه الفضاء

1. رجل أمبير

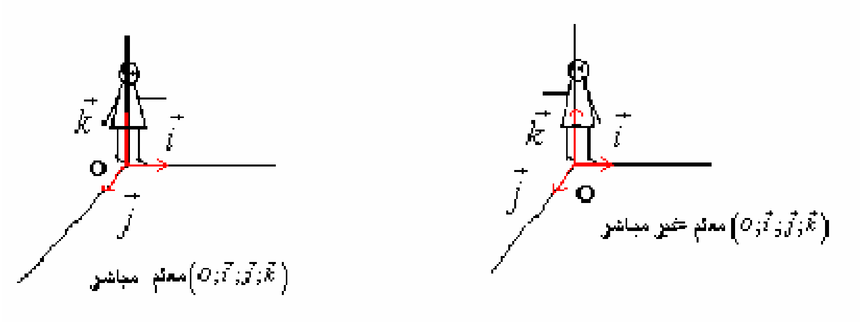
الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\Re = (O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath},\vec{k})$ ، نضع $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$

رجل أمبير للمعلم $\Re$ هو رجل رجلاه في النقطة O و رأسه في K و ينظر إلى النقطة I :

إذا كانت النقطة J على يسار رجل أمبير فإن $\Re$ معلم مباشر، و الفضا ء موجه توجيها مباشرا.

إذا كانت النقطة J على يمين رجل أمبير فإن $\Re$ معلم غير مباشر، و الفضاء موجه توجيها غير مباشر

2. مثال



II. تعريف متجهي للجداء المتجهي

1. تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$.

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب هو المتجهة : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ المعرفة كالتالي :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن:

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ عمودية على $\vec{u}$ و $\vec{v}$

الأساس $(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{w})$ مباشر

$\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ حيث : $0 < (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) < \pi$

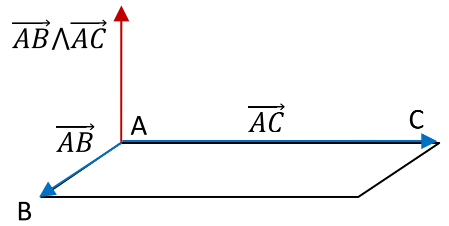
2. خاصية1

A و B و C نقط مستقيمية تكافئ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

A و B و C نقط غير مستقيمية تكافئ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

3. خاصية 2

إذا كانت A و B و C ثلاث نقط مختلفة و غير مستقيمية فإن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)



4. العمليات

مهما تكن $\overrightarrow{}$ و $\overrightarrow{}$ و $\vec{w}$ من $\mathcal{V}_3$ و مهما يكن العدد الحقيقي α فإن :

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$
$$\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$
$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{v}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$
$$\left(\alpha\vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \alpha\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = \vec{u} \wedge \left(\alpha\vec{v}\right)$$

5. تمرين تطبيقي رقم 2 ص 277

الحصة رقم 2

III. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في معلم متعامد ممنظم مباشر (م م م م)

1. خاصية 1

الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\mathfrak{R} = \left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j},\vec{k}\right)$

لدينا :

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k};\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i};\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$

2. خاصية 2

الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\mathfrak{R} = \left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j},\vec{k}\right)$

نضع $\vec{u}(x\,,y\,,z)$ و $\vec{v}(x'\,,y'\,,z')$ لدينا : $\vec{u}\wedge\vec{v}(X\,;Y\,;Z)$

بحيث : $X=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$ و $Y=-\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}$ و $Z=\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$

3. تمرين تطبيقي ص 279

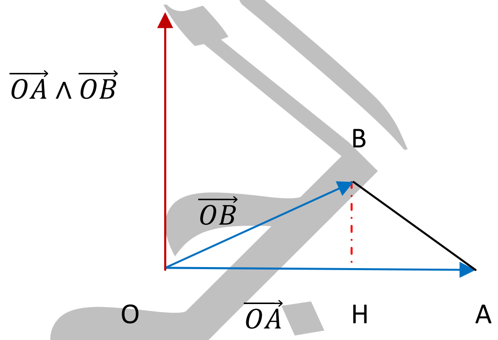
IV. تطبيقات الجداء المتجهي

الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\mathfrak{R} = \left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j},\vec{k}\right)$

1. التأويل الهندسي لمنظم الجداء المتجهي

a. البرهان

مساحة المثلث OAB هي :



$$S' = \frac{1}{2}OA.BH$$
$$= \frac{1}{2}OA.OB.\sin(\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\|.\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|$$

و منه $\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\| = 2S' = S$

b. خاصية

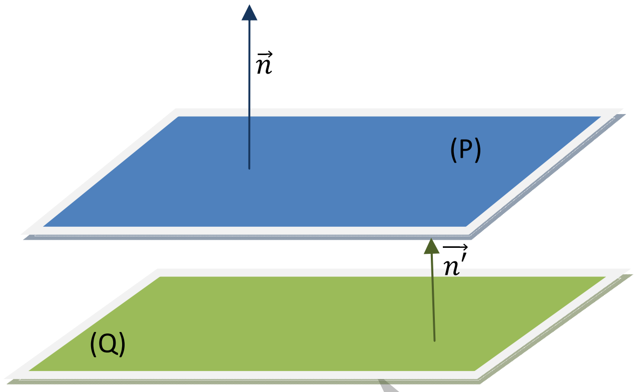
$\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|$ هي مساحة المتوازي الأضلاع المنشأ على القطعتين [OA] و [OB].

2. تقاطع مستويين

a. خاصية

(P) و (P') مستويان في الفضاء , و $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متجهتان منظميتان عليهما على التوالي.

إذا كان $\vec{n}\wedge\vec{n}' = \vec{0}$ فإن (P)//(P').



إذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0}$ فإن **(P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم موجه بالمتجهة** $\vec{w} = \vec{n} \wedge \vec{n'}$

شكل

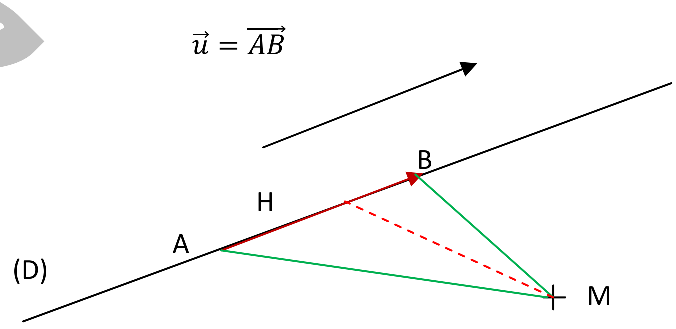
3. حساب مسافة نقطة عن مستقيم

a. برهان

$D(A;\vec{u})$ **مستقيم مار من النقطة A و موجه بالمتجهة $\vec{u}$. لتكن M نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$ و خارج المستقيم (D).**

نضع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

شكل



نعلم أن مساحة المثلث AMB هي :

$$S' = \frac{1}{2} AB.MH = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} \right\|$$

ومنه : $AB.MH = \left\| \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} \right\|$

8 أي $MH = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} \right\|}{AB} = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|}$

b. خاصية

$$d\left(M;(D)\right) = \frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|}$$

حيث A نقطة من المستقيم (D) و $\longrightarrow$ متجهة موجهة له

4. تمرين تطبيقي ص 281