المادة: الرياضيات

ملخص لدرس الأعداد العقدية (ب)

درس رقم/11

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

I. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$

المعادلة: $z^2 = a$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$

خاصية :

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم حلا المعادلة. $z^2 = a$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هما:

- $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ إذا كان. $a \succ 0$
- $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$ إذا كان $a \prec 0$.

أمثلة :

حلا المعادلة $z^2 = 5$ هما: $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$

حلا المعادلة. $z^2 = -3$. هما: $i\sqrt{3}$ و. $-i\sqrt{3}$

المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم

تعريف:

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في المجموعة $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية كل معادلة تكتب على الشكل $az^2 + bz + c = 0$, حيث z هو المجهول, و a و b و c أعداد حقيقية, و a غير منعدم

خاصية:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة:. $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم

العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$, يسمى مميز المعادلة $az^2 + bz + c = 0$.

- إذا كان $\Delta \succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما: $z = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z = -\dfrac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta \prec 0$ فان المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين ز مختلفين هما: $z = \dfrac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z' = \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$

أمثلة:

لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^2 - z + 2 = 0$

مميز المعادلة (E) هو : . $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = \left(i\sqrt{7}\right)^2$.

حلا المعادلة (E) هما: $z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ و $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

إذن: $S = \left\{ \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{7}}{2}; \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{7}}{2} \right\}$

لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^2 - z - 2 = 0$

مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$

حلا المعادلة (E) هما : $z_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ و $z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$.

إذن: . $S = \{-1; 2\}$

نتائج : ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ في المجموعة $\mathbb{C}$, لدينا:

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ لكل z من $\mathbb{C}$

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

مثال1:

1. حدد الجذرين المربعين لكل عدد من العددين التاليين:

أ. $a = 4 - 2\sqrt{3}$

ب. $b = -\cos^2 t$ مع $\left((t) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$

2. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين:

أ. $(1) \frac{1}{2}z^2 - 2z + \sqrt{3} = 0$

ب. $(2) z^2 + (2\sin t)z + 1 = 0$ حيث $\left((t) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$

مثال2: لكل z من $\mathbb{C}$, نضع: $P(z): z^2 - 2z + 2$

1. أحسب $P(1-i)$

2. استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

مثال3:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$, المعادلة: $(E): z^3 + 2(\sqrt{3} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z - 8 = 0$

1. بين أن العدد 2 حل للمعادلة (E)

2. بين أن لكل z من $\mathbb{C}$, لدينا:

$$z^3 + 2(\sqrt{3} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z - 8 = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$$

II. الترميز ألأسي لعدد عقدي غير منعدم

تعريف :

كل عدد عقدي z غير منعدم, معياره r و θ عمدة له يكتب على الشكل $re^{i\theta}$ هذه الكتابة تسمى ترميزا أسيا للعدد العقدي z

مثال:

ليكن: $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, لدينا: $|z| = 2$ و $\arg z \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ إذن $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هي ترميز أسي للعدد العقدي z

خاصية:

ليكن r و θ عددين حقيقيين. إذا كان $z = re^{i\theta}$ و $r \succ 0$ فان: $|z| = r$ و $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

III. الترميز ألأسي و العمليات

خاصية: ليكن r و r' عددين حقيقيين موجبين قطعا و θ و θ' عددين حقيقيين

$$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} \quad -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)} \quad re^{i\theta} \times r'e^{i\theta} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad \frac{r'e^{i\theta}}{re^{i\theta}} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$$

IV. صيغتا أولير

خاصية:

ليكن θ عددا حقيقيا , لدينا: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

مثال:

لنبين أن: $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

و منه: $\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2 + 2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2\right)$.

$= \frac{1}{4}(2\cos 2\theta + 2) = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$

V. صيغة موافر

خاصية:

ليكن θ عددا حقيقيا و n عنصرا من $\mathbb{N}$, لدينا: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

هذه المتساوية تسمى صيغة موافر, و تكتب أيضا: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

مثال:

لنبين أن: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

لدينا حسب صيغة موافر: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

و لدينا أيضا: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

و منه: $\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

إذن: $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$ و $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ (حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

ملحوظة:

لكل n من $\mathbb{N}$ و θ من $\mathbb{R}$ لدينا: $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$ و $e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i\sin(n\theta)$

مثال:

أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية:

$z_1 = 2 + 2i$ و $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_1 \times z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$