ثانوية ابن خلدون التأهيلية

عين بني مطهر

# المادة: الرياضيات

## ملخص لدرس الأعداد العقدية(أ)

درس رقم/7

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى:السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

## I. المجموعة $\mathbb{C}$

**تعريف**

كل عدد يكتب على الشكل $x+iy$, حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان, و $i$ العدد التخيلي الذي يحقق $i^2=-1$ , يسمى عددا عقديا. مجموعة الأعداد العقدية يرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ . و لدينا: $\mathbb{C}=\{x+iy/(x;y)\in\mathbb{R}^2\}$ حيث $i^2=-1$

## II. التمثيل الهندسي لعدد عقدي

**تعريف**

المستوى $(P)$ منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

كل عدد عقدي $z=x+iy$ , حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان, يربط بالنقطة $M$ التي زوج احداثياتيها $(x;y)$ في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$

نقول ان:

$M$ صورة العدد العقدي $z$ , و نكتب: $M(z)$ .

$\overrightarrow{OM}$ المتجهة الصورة للعدد العقدي $z$ , و نكتب: $M(z)$.

كل نقطة $M(x;y)$ من المستوى $(P)$ , هي صورة العدد العقدي $z=x+iy$ . نقول ان: $z$ لحق النقطة $M$ و نكتب $z_M$ أو لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ , و نكتب $z_{\overrightarrow{OM}}$ .

المستوى $(P)$ المنسوب الى المعلم المتعامد الممنظم المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ , يسمى المستوى العقدي.

### 1. مصطلحات

كل عدد عقدي يكتب على شكل $iy$ , حيث $y$ عدد حقيقي, يسمى عددا تخيليا صرفا, و نرمز بالرمز $i\mathbb{R}$ لمجموعة الأعداد التخيلية الصرفة,

أي $\{iy/y\in\mathbb{R}\}$

- الأعداد الحقيقية هي ألحاق نقط محور الأفاصيل $(o;\vec{u})$ , الذي يسمى المحور الحقيقي.
- الأعداد التخيلية الصرفة هي ألحاق نقط محور الأراتيب $(o;\vec{v})$ , الذي يسمى المحور التخيلي.

### 2. لحق متجهة

**تعريف**

لحق متجهة $\vec{w}$ هو لحق النقطة $N$ بحيث: $\overrightarrow{ON}=\vec{w}$ , أي:

إذا كانت $\vec{w}(a,b)$ فان لحق المتجهة $\vec{w}$ . هو العدد العقدي $a+ib$ .

**خاصية**

إذا كانت $A$ و $B$ نقطتين من المستوى العقدي لحاقهما $z_A$ و $z_B$ على التوالي,

فان لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$. هو العدد العقدي $z_B-z_A$

## مثال 1

نعتبر في المستوى العقدي النقط. $A(-2;1)$ و $B(-3;-1)$ و $C\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

ما ألحاق النقط $A$ و $B$ و $C$ ؟

## مثال 2

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ مثل النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي

هي: $-\sqrt{2}-2i;\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;2+i;2i$

## طريقة:

لتمثيل النقطة $M$ ذات اللحق $z=x+iy$ حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان: نمثل النقطة التي زوج احداثياتها $(x;y)$ في المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ أي: $M(x;y)$.

## مثال 3

النقطتان $A$ و $B$ لحقهما على التوالي هما: $-1+\frac{5}{2}i;2+i$.

$A'$ مماثلة $A$ بالنسبة للنقطة $O$.

$B_1$ مماثلة B بالنسبة للمحور الحقيقي, $B_2$ مماثلة B بالنسبة للمحور التخيلي.

1. مثل النقط $A$ و $B$ و $A'$ و $B_1$ و $B_2$ محددا ألحاقها.
2. حدد لحق كل من المتجهتين. $\overrightarrow{AB_2}$ و $\overrightarrow{B_1A}$.

# III. الكتابة الجبرية لعدد عقدي

## خاصية و تعريف

- كل عدد عقدي $z$ يكتب بكيفية وحيدة على الشكل. $x+iy$, حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان,
- الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي $z$.
- العدد الحقيقي $x$ يسمى الجزء الحقيقي للعدد $z$, و يرمز له بالرمز $\mathrm{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي $y$ يسمى الجزء التخيلي للعدد $z$, و يرمز له بالرمز $\mathrm{Im}(z)$.

# IV. تساوي عددين عقديين

## خاصية

يكون عددان عقديان $z$ و. $z'$ متساويين اذا و فقط اذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ و. $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$.

**حالة خاصة:** $x$ و $y$ عددان حقيقيان, لدينا: $(x=0)$ و $(y=0)$.

## ملحوظة

ليكن $z$ عددا عقديا,لدينا: $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0; z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$.

# V. العمليات على الأعداد العقدية

جميع قواعد الحساب المتعلقة بعمليتي الجمع و الضرب في $\mathbb{R}$ تمدد الى المجموعة $\mathbb{C}$, مع استعمال $i^2=-1$.

- **مجموع و جداء عددين عقديين**

ليكن $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ عددين عقديين,بحيث. $x$ و $y$ و $x'$ و $y'$ أعداد حقيقية, و $k$ عدد حقيقي,لدينا:

$kz=kx+iky; z\times z'=xx'-yy'+i(xy'+yx'); z+z'=(x+x')+i(y+y')$.

- **مقلوب عدد عقدي غير منعدم-خارج عددين عقديين**

ليكن $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ عددين عقديين على شكلهما الجبري مع $z\neq 0$. لدينا: $(x+iy)\times(x-iy)=x^2+y^2$ و منه

فان: $\frac{1}{z}=\frac{1}{(x+iy)}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$ و

$\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}=\frac{(x'+iy)(x-iy)}{x^2+y^2}=\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}+i\frac{xy'+x'y}{x^2+y^2}$.

- **التأويل الهندسي لمجموع عددين عقديين**

لتكن $M$ و $M'$ نقطتين من المستوى العقدي, لحقاهما على التوالي. $z$ و $z'$.
بحيث:. $z = x+iy$ و. $z' = x'+iy'$. مع. $x$ و $y$ و $x'$ و $y'$ أعداد حقيقية.
نعتبر النقطة $S$ بحيث:. : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$
لدينا:. $\overrightarrow{OS}\left(x+x'; y+y'\right)$, أي لحق النقطة $S$ هو: $\left(x+x'\right)+i\left(y+y'\right) = x+iy+x'+iy = z+z'$.
إذن: $z+z'$. هو لحق النقطة $S$ و الرباعي $OMSM'$.متوازي أضلاع.

- **التأويل الهندسي لضرب عدد حقيقي في عدد عقدي**

لتكن $M\left(x;y\right)$ النقطة ذات اللحق $z$ و $k$ عددا حقيقيا غير منعدم.
الجداء $k \times z$ هو لحق النقطة $P\left(kx;ky\right)$ التي تحقق:. $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OM}$.
اذن النقطة $P$ هي صورة $M$ بالتحاكي الذي مركزه $O$ و نسبته $k$

**حالة خاصة:** النقطتان $M\left(z\right)$ و, $N\left(-z\right)$ . متماثلتان بالنسبة للنقطة $O$.

**مثال 1:**

أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

$z_1 = 5i-\left(3+2i\right)$ ; $z_2 = 2\left(5-i\right)+3\left(i-4\right)$ .

$z_3 = \left(-4+2i\right)^2$ ; $z_2 = \left(5-11i\right)\left(2-i\right)$ .

**مثال 2:**

أكتب على الشكل الجبري مقلوب كل من الأعداد العقدية التالية:

$$z_1 = 2+i \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3}-i \quad ; \quad z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} .$$

**مثال 3:**

1. أحسب. $i^3$ ;. $i^4$ ;. $i^5$ ;. $i^6$ ;. $i^7$ ; $i^8$..
2. بين أنه إذا كان $n$ عددا صحيحا طبيعيا مضاعفا للعدد4 فان. $i^n = 1$.
3. أحسب حسب قيم العدد الصحيح الطبيعي $n$ العدد. $i^n$.
4. أحسب. $\left(1+i\right)^{2007}$.
5. أحسب المجموع:. $S = 1+i+i^2+.......+i^{2008}$..

**ملحوظة1 :**

$\left(\forall z \in \mathbb{C}^*\right);\ z^0 = 1$ .

لكل. $n$ و $m$ من $\mathbb{N}^*$ و لكل $z$ من $\mathbb{C}$, لدينا:

$z^n \times z^m = z^{n+m}$ و $\left(z^n\right)^m = z^{n\times m}$.

**ملحوظة 2:**

$n$ عدد صحيح طبيعي غير منعدم و $z$ عدد عقدي:

لدينا: $1-z^n = \left(1-z\right)\left(1+z+z^2+.....+z^{n-1}\right)$

## VI. تطبيقات

### 1. لحق منتصف قطعة

**خاصية** إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي لحقهما $z_A$ و.. $z_B$ ..على التوالي, فان لحق النقطة $I$ منتصف $[AB]$ هو العدد العقدي $z_I$ بحيث: $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$

### 2. استقامية ثلاث نقط من المستوى العقدي

**خاصية**

لتكن A و B و $C$ ثلاث نقط من المستوى العقدي بحيث $A \neq C$ و ألحاقها. $z_A$ و $z_B$ و $z_C$ على التوالي.

تكون. A و B و $C$ نقطا مستقيمية إذا و فقط إذا كان: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ عددا حقيقيا.

## VII.مرافق عدد عقدي

### 1.تعريف

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا و حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان.

العدد العقدي $x-iy$ يسمى مرافق العدد العقدي $z$ ونرمز له بالرمز $\overline{z}$.

**أمثلة**

$\overline{-7}=-7;\overline{2i}=-2i;\overline{-5-3i}=-5+3i;\overline{3+2i}=3-2i$.

### 2.التأويل الهندسي

في المستوى العقدي, النقطتان $M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي.

**ملحوظة**

النقطتان $M(z)$ و $N(z')$ متماثلتان بالنسبة للمحور الحقيقي اذا و فقط اذا كان: $z'=\overline{z}$.

### 3.نتائج

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا, حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان,لدينا:

$\overline{\overline{z}}=z$ و $z\overline{z}=x^2+y^2$ ($z\overline{z}$ عدد حقيقي موجب)

$z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$. $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$

**خاصية**

ليكن $z$ عددا عقديا,لدينا:

$z$ عدد حقيقي اذا وفقط اذا كان : $z=\overline{z}$. $z$ عدد تخيلي صرف اذا وفقط اذا كان: $\overline{z}=-z$.

### 4.المرافق و العمليات في المجموعة $\mathbb{C}$ .

**خاصية** ليكن $z$ و $z'$ عددين عقديين و $n$ عددا صحيحا نسبيا,لدينا:

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$. $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ و. $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ حيث, $z\neq 0$ $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$, حيث $z\neq 0$

**تمرين:** ليكن $z$ عددا عقديا.

أكتب, بدلالة $\overline{z}$, مرافقات الأعداد العقدية التالية:

$$Z_1=2z+5i \text{ و } Z_2=(z-i)(z-3) \text{ و } Z_3=\frac{2z^2+z-1}{-3z+i}.$$

**تمرين:** حدد هندسيا مجموعة النقط $M$ ذات اللحق $z$ بحيث يكون $\frac{z+2i}{z-4i}$ عددا حقيقيا.

**تمرين:**

حدد مجموعة النقط $M$ ذات اللحق $z$ بحيث يكون $Z=z^2-\overline{z}$ عددا حقيقيا

**تمرين:**

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين:

1. $z=2\overline{z}-2+6i$
2. $2z+i\overline{z}=5-4i$

## VIII. معيار عدد عقدي

### 1.تعريف

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا, حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\overline{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z$, و نرمز له بالرمز $|z|$ و لدينا: $\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

**ملحوظة**

$|z|^2=z\overline{z}$ .و $(\forall z\in\mathbb{C}),|z|\in\mathbb{R}^+$

**أمثلة**

$|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5;|-2i|=\sqrt{(-2)^2}=2$.

## 2. التأويل الهندسي

لتكن $M$ نقطة من المستوى العقدي لحقها. $z=x+iy$ ($x$ و $y$ عددان حقيقيان)

لدينا: $M\left(x;y\right)$ و منه: $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=OM=\sqrt{x^2+y^2}=\left|z\right|$

إذن معيار العدد العقدي $z$ هو المسافة $OM$, أي: , $OM=\left|z\right|$.

## 3. خاصية

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي, لحقهما على التوالي. $z_{\mathrm{A}}$ و $z_{\mathrm{B}}$, لدينا: $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=\mathrm{AB}=\left|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}\right|$.

**البرهان**

نعتبر النقطة $M$ التي تحقق: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

لدينا: $z_M=z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}$, حيث $z_M$ لحق النقطة $M$. إذن: $\left|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}\right|=\left|z_M\right|=OM=\mathrm{AB}$.

## 4. خاصيات

- لكل عددين عقديين $z$ و $z'$, لدينا:

$$\left|\bar{z}\right|=\left|-z\right|=\left|z\right| \qquad \left|z\right|=0\Leftrightarrow z=0 \qquad \left|z\times z'\right|=\left|z\right|\times\left|z'\right|.$$

- إذا كان $z\neq 0$ فإن: $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{\left|z\right|}$ و. $\left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{\left|z'\right|}{\left|z\right|}$

- إذا كان. $z\neq 0$ فان لكل عدد صحيح نسبي. $n$: $\left|z^n\right|=\left|z\right|^n$

$$\left|z+z'\right|\leq\left|z\right|+\left|z'\right|$$

**ملحوظة:**

لتكن A و B و $C$ ثلاث نقط من المستوى العقدي ألحاقها هي: $z_{\mathrm{A}}$ و $z_{\mathrm{B}}$ و $z_C$ بحيث:. $z_C\neq z_{\mathrm{A}}$ لدينا:. $\dfrac{\mathrm{AB}}{AC}=\left|\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}{z_C-z_{\mathrm{A}}}\right|$.

**تمرين:** نعتبر النقط A و B و $C$ التي ألحاقها على التوالي:

. $z_{\mathrm{A}}=1+i$ و $z_{\mathrm{B}}=2+3i$ و $z_C=1+2i$.

بين أن المثلث $ABC$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في A.

**تمرين:** تحديد مجموعة النقط $M$ التي لحقها. $z$ بحيث:

$$\left|z-1+2i\right|=1$$

و $\left(\Delta\right)$ مجموعة النقط $M$ التي لحقها. $z$ بحيث:. $\left|z\right|=\left|\bar{z}-1+2i\right|$

حدد و أنشئ المجموعتين. $\left(C\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

**تمرين:** لكل عدد عقدي $z$ يخالف 1, نضع: $f\left(z\right)=\dfrac{1-z}{z-1}$.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة. $f\left(z\right)=2z$.
2. ليكن $z$ عنصرا من. $\mathbb{C}-\{1\}$.

بين أنه اذا كان. $\left|z\right|=1$ فان. $f\left(z\right)=z$.

# IX. عمدة و شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

## 1. عمدة عدد عقدي غير منعدم

**تعريف**

ليكن. $z$ عددا عقديا غير منعدم و $M$ صورته في المستوى العقدي

نسمي عمدة العدد العقدي $z$ أحد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$.

و نرمز له بالرمز $\arg z$, و نكتب:. $\arg z\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\left[2\pi\right]$.

**ملحوظة** إذا كان $\alpha$ عمدة عدد عقدي غير منعدم. $z$, فان كل عدد يكتب على الشكل. $\alpha+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, هو كذلك عمدة العدد العقدي $z$ و

نكتب:. $\arg z=\alpha\left[2\pi\right]$. <u>العدد العقدي 0 ليس له عمدة</u>

## نتائج

- **عمدة عدد حقيقي:**

ليكن $z$ عددا عقديا غير منعدم,لدينا:

$z\in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z\equiv 0[2\pi]$ .

$z\in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z\equiv \pi[2\pi]$ .

$k\in \mathbb{R} \Leftrightarrow z=0$ أو $\arg z=k\pi;k\in \mathbb{Z}$ .

- **عمدة عدد تخيلي صرف:**

1. ليكن $y$ عددا حقيقيا غير منعدم,لدينا:

إذا كان. $y\succ 0$ فان: $\arg(iy)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذا كان. $y\prec 0$ فان: $\arg(iy)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

2. ليكن $z$ عددا عقديا: $(z\in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (z=0$ أو $\arg z=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in \mathbb{Z})$

## خاصية

ليكن . $z$ عددا عقديا غير منعدم, لدينا:

- $\arg(-z)\equiv \pi+\arg z[2\pi]$
- $\arg \bar{z}\equiv -\arg z[2\pi]$

**تمرين:** نعتبر النقط A و B و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي:

$a=2$ و $b=-2i$ و $c=2+2i$ و $d=-2+2i$

أنشئ النقط A و B و $C$ و $D$.

اعتمادا على السؤال السابق, حدد عمدة كل عدد من الأعداد العقدية $a$ و $b$ و $c$ و $d$ .

**تمرين:** حدد عمدة العدد العقدي $z$ في كل حالة من الحالات التالية:

. $z=5i$ . $z=-1$ .

$z=-3i$ $z=2$

**تمرين:** نعتبر النقطة $M$ من الدائرة المثلثية,أفصولها المنحنى. $\frac{\pi}{3}$ و $z$ لحقها

1) حدد عمدة العدد العقدي $z$ .

2) نعتبر النقط $M_1$ و $M_2$ و $M_3$ التي ألحاقها. $\bar{z}$ و $-z$ و $-\bar{z}$ على التوالي

a) مثل النقط $M_1$ و $M_2$ و $M_3$

b) حدد عمدة كل عدد من الأعداد العقدية . $\bar{z}$ و $-z$ و $-\bar{z}$

## 2.شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

### تعريف

ليكن. $z$ عددا عقديا غير منعدم,

الكتابة $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $r=|z|$ و. $\theta\equiv \arg z[2\pi]$ .تسمى شكلا مثلثيا للعدد العقدي $z$

### مثال

لنحدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: $z=1+i$ .

لدينا: $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

و منه. $z=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ .

إذن. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ هو شكل مثلثي للعدد العقدي $z=1+i$ .

و لدينا.. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$ هو شكل مثلثي آخر للعدد. $z=1+i$ (لأن $\frac{9\pi}{4}\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$)

**خاصية**

ليكن $z$ عددا عقديا غير منعدم

إذا كان $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $r\succ 0$, فان: . $|z|=r$ و $\arg z\equiv\theta[2\pi]$ .

## 3. تساوي عددين عقديين على شكلهما المثلثي

**خاصية**

ليكن $z$ و $z'$ عددين عقديين غير منعدمين,لدينا$(|z|=|z'|$ و $\arg z\equiv\arg z'[2\pi])\Leftrightarrow z=z'$

## 4. العلاقة بين الشكل الجبري و شكل مثلثي لعدد عقدي

**خاصية**

ليكن $z=x+iy$ و $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, على التوالي الشكل الجبري و شكلا مثلثيا لعدد عقدي غير منعدم $z$ , لدينا: .

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ و. $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ و $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ .

| | | |
|---|---|---|
| شكل مثلثي | $r=\lvert z\rvert\sqrt{x^2+y^2};\cos\theta=\dfrac{x}{r};\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ | الشكل الجبري |
| $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ | $x=r\cos\theta;\ y=r\sin\theta$ | $z=x+iy$ . |

**أمثلة**

- ليكن العدد العقدي. $z_1=1-i\sqrt{3}$ لدينا.. $|z_1|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}$

إذا كان $\theta$ عمدة العدد. $z_1$ , فان: $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ و $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

إذن $\theta\equiv-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ و بالتالي: $z_1=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ .

- ليكن العدد العقدي. $z_2$ بحيث: $\arg z_2\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ و. $|z_2|=4$ .

لدينا: . $z_2=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=4\left(-\dfrac{1}{2}i+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2i+2\sqrt{3}$ .

**تمرين:** أعط شكلا مثلثيا لكل من العددين العقديين التاليين:

$z_1=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right);\ z_2=2\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ .

**تمرين:** حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1=\sqrt{3}+3i$ , $z_2=-2+2i$ .

. $z_3=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ., $z_4=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

**طريقة:** اذا كان $z=x+iy$ ,حيث . $x$ و $y$ عددان حقيقيان و $(x;y)\neq(0;0)$

فان $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\arg z\equiv\theta[2\pi]$

بحيث: $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و. $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .

**ملحوظة:** باستعمال النسب المثلثية , يمكن الحصول على شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

**تمرين:** نعتبر العدد العقدي: $z=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ .

1. أكتب شكلا مثلثيا للعدد العقدي $z$ .
2. استنتج قيمة. $\cos=\dfrac{\pi}{12}$ .

## 5.العمليات و عمدة عدد عقدي

**خاصية**

ليكن. $z$ و $z'$ عددين عقديين غير منعدمين, لدينا:

- $\arg(z\times z')\equiv \arg z+\arg z'[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{2}\right)\equiv -\arg z[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv \arg z-\arg z'[2\pi]$ .
- $\arg(z^n)\equiv n\arg z[2\pi]$ لكل $n$ من $\mathbb{Z}$

**نتائج:**

ليكن $z$ و $z'$ عددين عقديين غير منعدمين, بحيث:

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $z'=r(\cos\theta'+i\sin\theta')$ مع $r\succ 0$ و. $r'\succ 0$ ,لدينا:

- $-z=r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi))$.
- $\bar{z}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$.
- $z\times z'=rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$
- $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}(\cos(\theta'-\theta)+i\sin(\theta'-\theta))$
- $z^n=r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ لكل. $n$ من $\mathbb{Z}$.

## X. زاوية متجهتين و عمدة خارج لحقيهما

### 1.خاصية

لتكن A و B و $C$ و $D$ نقطا من المستوى العقدي مثنى مثنى, ألحاقها على التوالي. $z_A$ و $z_B$ و $z_C$ .و $z_D$ , لدينا:

- $\overline{(\vec{u};\overrightarrow{AB})}\equiv \arg(z_A-z_B)[2\pi]$.
- $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}\equiv \arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$.
- $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})}\equiv \arg\left(\frac{z_D-z_c}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

### 2.نتائج

لتكن A و B و $C$ و $D$ نقطا من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى,ألحاقها. $z_A$ و $z_B$ و $z_C$ .و $z_D$ , لدينا:

❖ **استقامية ثلاث نقط**

تكون النقط. A و B و $C$ مستقيمية اذا و فقط اذا كان:

. $\arg\left(\frac{z_A-z_c}{z_B-z_c}\right)\equiv 0[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A-z_c}{z_B-z_c}\right)\equiv \pi[2\pi]$

❖ **توازي مستقيمين**

يكون المستقيمان $(AB)$ و $(CD)$ متوازيان اذا وفقط اذا كان:. $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv 0[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv \pi[2\pi]$ .

❖ **تعامد مستقيمين**

يكون المستقيمان. $(AB)$ و $(CD)$ متعامدين إذا وفقط إذا كان:

$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

## تمرين:العلاقة بين الشكل الجبري و شكل مثلثي لعدد عقدي

نعتبر العددين العقديين. $z_1 = \sqrt{3} - i$ .و $z_2 = 1 - i$ و $Z = \frac{z_1}{z_2}$ .

1. أعط شكلا مثلثيا لكل من $z_1$ و $z_2$ و $Z$ .
2. أكتب $Z$ على الشكل الجبري ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ .

## تمرين:تحديد شكل مثلثي لعدد عقدي

نعتبر العدد العقدي $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ .

1. أحسب $z^2$ , ثم حدد عمدة العدد العقدي. $z^2$ .
2. استنتج شكلا مثلثيا للعدد العقدي $z$ .

## تمرين: زاوية متجهتين

نعتبر النقط. A و B و $C$ التي ألحاقها على التوالي هي:

$z_{\mathrm{A}} = -2$ .و. $z_{\mathrm{B}} = 1 + i$ و $z_C = -1 - 3i$ .

حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}\right)$ ,ما طبيعة المثلث. $ABC$ ؟