

## المادة: الرياضيات

## ملخص لدرس الاشتقاق

## ودراسة الدوال

مذكرة رقم : 4  
الأستاذ : عثمانى نجيب

## مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

## I. اشتقاق دالة في نقطة:

## تعريف:

نقول ان دالة  $f$  قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0$  إذا وجد عدد حقيقي  $l$  بحيث  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = l$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \text{ أو}$$

العدد  $l$  يسمى العدد المشتق للدالة  $f$  في النقطة  $x_0$ . و نكتب  $l = f'(x_0)$

## ملاحظة:

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  فان معادلة مماس المنحنى  $(C_f)$  في النقطة التي أفصولها  $x_0$  هي:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

## II. الدالة المشتقة:

## مشتقات الدوال الاعتيادية:

المجال	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	$k$
$\mathbb{R}$	$a$	$ax$
$\mathbb{R}$	$2x$	$x^2$
$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$	$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$
$] -\infty, 0[$ أو $] 0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$

## العمليات على الدوال المشتقة:

الشرط	مشتقتها	الدالة
	$u' + v'$	$u + v$
	$k \cdot u'$	$k \cdot u$
	$u'v + uv'$	$u \cdot v$
$u$ لا تنعدم في $I$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$
$v$ لا تنعدم في $I$	$\frac{u'v + uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
	$nu^{n-1}u'$	$u^n (n \in \mathbb{N}^*)$

### III. رتبة دالة و إشارة مشتقتها:

خاصية:

$I$  مجال من  $\mathbb{R}$  و  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على  $I$ .

▪  $f$  ثابتة على  $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$  لكل  $x$  من  $I$ .

▪  $f$  تزايدية على  $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $I$ .

▪  $f$  تناقصية على  $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $I$ .

ملاحظة:  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$ .

إذا انعدمت  $f'(x)$  في  $x_0$  مغيرة اشارتها بالمرور من فان  $f$  تقبل مطرافا في  $x_0$ .

### IV. نهايات دالة:

نهاية دالة حدودية في  $+\infty$  أو في  $-\infty$  هي نهاية حدها الأعلى درجة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \quad (c \neq 0)$$

و نهاية الدالة  $\frac{ax+b}{cx+d}$  في  $x \rightarrow -\frac{d}{c}$  هي  $+\infty$  أو في  $-\infty$ .

ملاحظة:

▪ إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  فان المستقيم ذا المعادلة  $y = l$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$ .

▪ إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  فان المستقيم ذا المعادلة  $x = x_0$  مقارب عمودي.

### V. المعادلة و المتراجحة:

دالة عددية و  $(C_f)$  منحناها و  $c$  عدد حقيقي.

▪ حلول المعادلة  $f(x) = c$  هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $y = c$ .

▪ حلول المتراجحة  $f(x) = c$  هي المجالات التي يكون فيها المنحنى  $(C_f)$  تحت المستقيم  $y = c$ .

▪ حلول المتراجحة  $f(x) = c$  هي المجالات التي يكون فيها المنحنى  $(C_f)$  فوق المستقيم  $y = c$ .

### مثال 1 : دراسة دالة حدودية:

دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. حدد أرتوب مركز تماثل منحنى الدالة  $f$  علما أن أفصولها يساوي 1.

2. حدد حيز الدراسة و أحسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  على حيز الدراسة.

4. أنشئ منحنى الدالة  $f$ .

5. حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة  $f(x) = 3$  على المجال  $]-\infty, 1]$ .

### الحل:

1. الدالة  $f$  حدودية يعني معرفة على  $\mathbb{R}$  , و يعني أن مركز تماثل  $(C_f)$  ينتمي اليه.

فإذا كان أفصول مركز التماثل هو 1 فان أرتوبه هو  $f(1) = 2$ .

2. حيز دراسة الدالة  $f$  هو  $D = [1, +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

3. لكل  $x$  من  $[1, +\infty[$  :  $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x$

يعني:  $f'(x) = 3x(x-2)$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 3x(x-2) = 0$$

يعني  $x = 0$  أو  $x = 2$

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

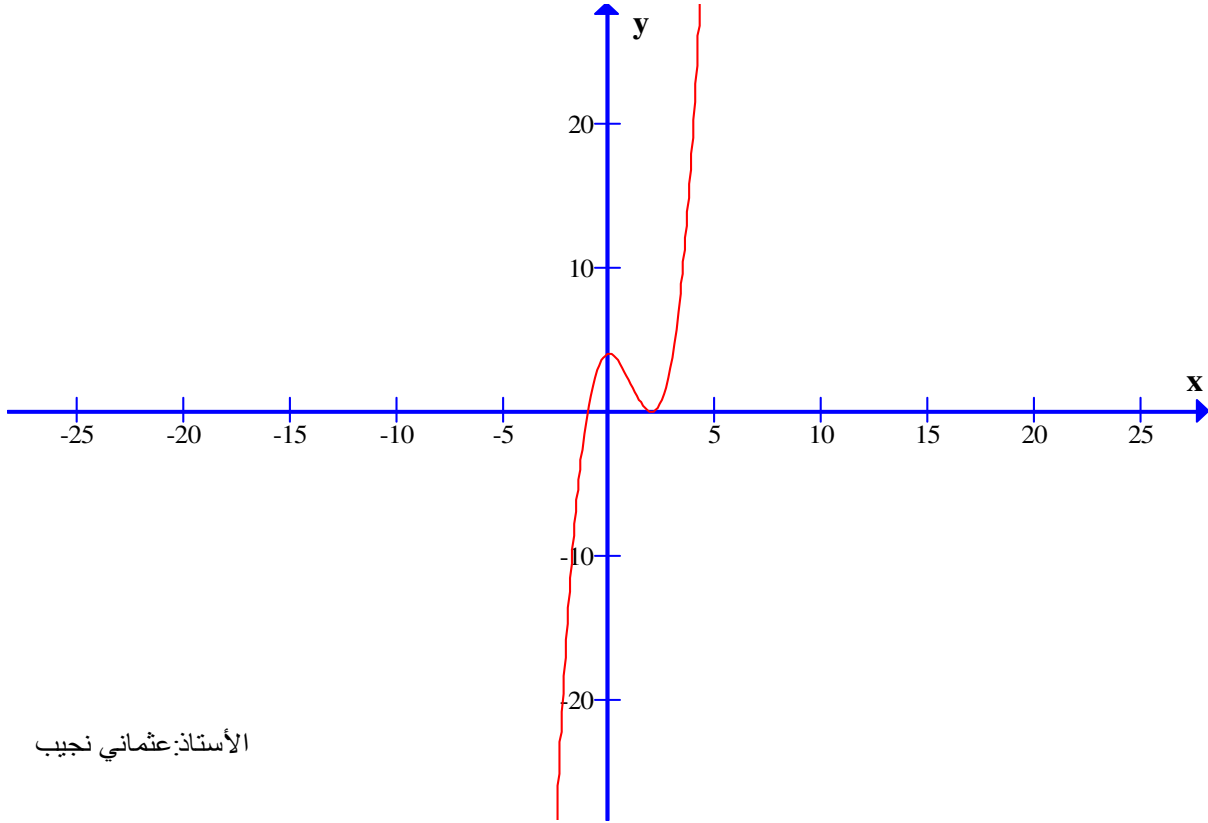
$x$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2	0	$+\infty$

جدول إشارة  $f'(x)$

$x$	1	2	$+\infty$
$3x$	+		+
$x-2$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

4. التمثيل المبياني للدالة  $f$ .

نبدأ برسم المنحنى على المجال  $[1, +\infty[$  ثم نستعمل التماثل المركزي الذي مركزه  $I(1, 2)$  لإتمام المنحنى على  $\mathbb{R}$ .



الأستاذ: عثمانى نجيب

5. مبيانيا، نلاحظ أن المستقيم ذا المعادلة  $y = 3$  يقطع المنحنى  $(C_f)$  مرتين على المجال  $]-\infty, 1]$ .

ومنه المعادلة  $f(x) = 3$  تقبل حلين على المجال  $]-\infty, 1]$ .

**مثال 2 : دراسة دالة متخاطة:**

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة ب:  $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة  $g$ .

2. أحسب نهايات الدالة  $g$  في محداث حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.

3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $g$ .

4. أنشئ منحنى الدالة  $g$ .

5. حل مبيانيا المتراجحة  $2 < g(x) < -2$ .

**الحل:**

1. حيز تعريف الدالة  $g$  هو:  $D = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

و منه  $D = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad 2.$$

يعني المستقيم ذا المعادلة  $y = 1$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

يعني المستقيم ذا المعادلة  $x = 1$  مقارب عمودي للمنحنى.

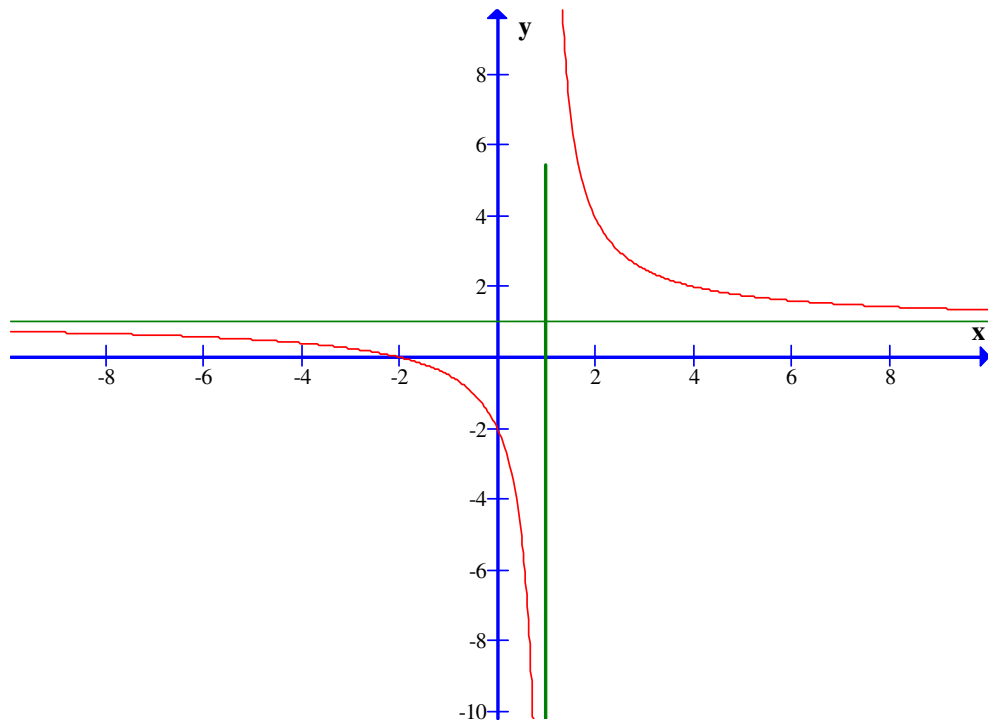
$$g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \quad 3. \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ لدينا:}$$

$$(\forall x \in D) g'(x) < 0 \text{ يعني:}$$

جدول تغيرات الدالة.

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$	$1$		$1$

4. منحنى الدالة  $g$ .



$$5. \text{ لدينا } g(0) = -2 \text{ و } g(4) = 2$$

مجموعة حلول المتراجحة  $-2 < g(x) < 2$  هي:

$$S = ]-\infty, 0[ \cup ]4, +\infty[$$

**VI. دراسة الدالة**  $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$

1. مجموعة تعريف الدالة  $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$

مجموعة تعريف الدالة  $(a \neq 0)f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$  هي:

في جميع الحالات يجب أن يكون  $ax + b \geq 0$ .

لدينا:  $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$  في الحالتين.

$$D_f = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right[ \quad \text{إذا كان } a > 0$$

$$D_f = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right] \quad \text{إذا كان } a < 0$$

2. **نهايات الدالة**  $x \mapsto \sqrt{ax + b}$  ( $a \neq 0$ ):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{ax + b} = +\infty \quad \text{إذا كان } a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{ax + b} = +\infty \quad \text{إذا كان } a < 0$$

3. **اشتقاق الدالة**  $x \mapsto \sqrt{ax + b}$  ( $a \neq 0$ ):

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة ب:  $(a \neq 0)f(x) = \sqrt{ax + b}$

$$\text{إذا كان } a > 0 \text{ فإن الدالة } f \text{ غير قابلة للاشتقاق في النقطة } -\frac{b}{a} \text{ و قابلة للاشتقاق على } \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$$

$$\text{فان: } \left(\forall x \in \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[\right) f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$$

$$\text{إذا كان } a < 0 \text{ فإن الدالة } f \text{ غير قابلة للاشتقاق في النقطة } -\frac{b}{a} \text{ و قابلة}$$

$$\text{للاشتقاق على } \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[ \text{ فان: } \left(\forall x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[\right) f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$$

إذا كان  $a > 0$  فإن

$$\frac{a}{2\sqrt{ax + b}} > 0 \quad \text{يعني}$$

$$f'(x) > 0$$

إذا كان  $a < 0$  فإن

$$\frac{a}{2\sqrt{ax + b}} < 0 \quad \text{يعني}$$

$$f'(x) < 0$$

4. **جدول تغيرات الدالة**  $x \mapsto \sqrt{ax + b}$  ( $a \neq 0$ ):

حالة  $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f'		-	
f(x)	$+\infty$		0

حالة  $a < 0$

x	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$

**ملاحظة: الرمز** || يعني أن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق في النقطة  $-\frac{b}{a}$

**مثال: لدراسة الدالة من قبيل**  $x \mapsto \sqrt{ax + b}$  ( $a \neq 0$ ):

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة ب:  $f(x) = \sqrt{3x - 5}$

1. حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$ .

2. أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة في النقطة  $\frac{5}{3}$  على اليمين.

4. أحسب  $f'(x)$  و ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ .

5. أحسب  $f(2)$  و  $f(3)$  و  $f(7)$ .

6. مثل مبيانيا الدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم.

**الحل:**

1.  $f(x)$  معرفة إذا فقط إذا كان  $3x - 5 \geq 0$  يعني  $3x \geq 5$  ومنه  $x \geq \frac{5}{3}$

يعني حيز تعريف الدالة  $f$  هو:  $D = \left[ \frac{5}{3}, +\infty \right[$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x \left( 3 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sqrt{3 - \frac{5}{x}} = +\infty$$

$$3. \text{ نحسب النهاية } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{5}{3}\right)}{x - \frac{5}{3}}$$

$$\text{لدينا: } \frac{f(x) - f\left(\frac{5}{3}\right)}{x - \frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{3x - 5} - 0}{x - \frac{5}{3}} = \frac{3\sqrt{3x - 5}}{3x - 5} = \frac{3}{\sqrt{3x - 5}}$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+} \sqrt{3x - 5} = 0 \text{ و } \left( \forall x > \frac{5}{3} \right) : \sqrt{3x - 5} > 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{5}{3}\right)}{x - \frac{5}{3}} = +\infty$$

هذا يعني أن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $\frac{5}{3}$  على اليمين.

$$4. \text{ لدينا: } f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 5}} \left( \forall x \in \left] \frac{5}{3}, +\infty \right[ \right)$$

بما أن  $\frac{3}{2} > 0$  و  $\sqrt{3x - 5} > 0$  فان:  $f'(x) > 0$ .

جدول التغيرات:

x	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

$$5. \text{ لدينا: } f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 5} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{ و } f(3) = \sqrt{3 \times 3 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{ و } f(7) = \sqrt{3 \times 7 - 5} = \sqrt{16} = 4$$

6. التمثيل المبياني:

$$\left( \frac{5}{3}, 0 \right) \text{ هي النقطة } A \text{ التي تنتمي لـ } (C_f).$$

$$f(2) = 1 \text{ يعني أن النقطة } B(2, 1) \text{ تنتمي لـ } (C_f).$$

$$f(3) = 2 \text{ يعني أن النقطة } B(3, 2) \text{ تنتمي لـ } (C_f).$$

$$f(7) = 4 \text{ يعني أن النقطة } B(7, 4) \text{ تنتمي لـ } (C_f).$$

