I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

أمثلة:

مثال 1: $2x-22=0$

مثال 2: $3(2x+5)=6x-8$

مثال 3: $4(x-2)=6x-2(x+4)$

مثال 4: حل في المعادلات التالية:

$$(2x+3)(9x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$$

مثال 5: حل في المعادلات التالية:

$$\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$$

مثال 6: $7x^3-x=0$

II. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1. تعريف و خاصية:

تعريف: المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث x هو المجهول و a و b و c أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1:

العدد 1- حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$

لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

مثال 2:

العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$

لأن: $(\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

ملاحظة :

كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2+bx+c=0$ هو حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ و يسمى جذر للحدودية ax^2+bx+c.

تعريف:

لتكن ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ و نرمز له بالرمز Δ.

مثال:

نعتبر المعادلة $(E): 3x^2-5x+7=0$

لنحسب مميز المعادلة (E)

لدينا: $a=3$ و $b=-5$ و $c=7$ بما أن: $\Delta=b^2-4ac$

فان: $\Delta=(-5)^2-4\times7\times3=25-84=-59$

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

2. خاصية:

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

- ✓ إذا كان $\Delta \prec 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.
- ✓ إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\dfrac{b}{2a}$
- ✓ إذا كان $\Delta \succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

مثال1:

المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$. لأن $\Delta \prec 0$ $(\Delta = 1-4\times 3\times 2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\phi$.

مثال 2:

المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد لأن $\Delta = 0$ $(\Delta = 10^2-4\times 25=0)$.

حل هذه المعادلة هو: $-\dfrac{b}{2a}=5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

مثال 3:

نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta = 9-4\times 2=1$ بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\dfrac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

3. تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

خاصية:

نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta \succ 0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2.
   و لدينا: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
2. إذا كان: $\Delta = 0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$
3. إذا كان: $\Delta \prec 0$ فان: ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

مثال:

نعتبر الحدودية $R(x)=6x^2-x-1$ مميز الحدودية $R(x)$ هو $\Delta = 1+24=25$.

إذن حلا المعادلة $R(x)=0$ هما $x_1=\dfrac{1+5}{12}=\dfrac{1}{2}$ و $x_2=\dfrac{1-5}{12}=-\dfrac{1}{3}$. و بالتالي: $R(x)=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

إشارة الحدانية: $ax+b$ $\quad a\neq 0$

ملخص:

x	$-\infty$ $\qquad -\dfrac{b}{a}$ $\qquad +\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a $\quad 0 \quad$ إشارة a

مثال 1: لنحدد إشارة $2x+1$

لدينا $2x+1=0$ يكافئ $x=-\dfrac{1}{2}$

و بما أن $a=2$ و $a\succ 0$ جدول إشارة $2x+1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$ $\qquad -\dfrac{1}{2}$ $\qquad +\infty$
$2x+1$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x+2$
لدينا $-x+2=0$ يكافئ $x=2$
و بما أن: $a=-1$ و $a \prec 0$ فان جدول إشارة $-x+2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$-$	0	$+$

مثال 3: حدد إشارة: $2x-4$
حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $2x-4 \geq 0$
مثال 4: حدد إشارة: $-3x+9$
حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $-3x+9 \prec 0$

IV. متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

مثال 1: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:
$$(-5x+20)(3x-7) \geq 0$$
مثال 2: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $9x^2-25 \prec 0$
مثال 3:
1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2-5x+6=0$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $x^2-5x+6 \geq 0$

V. النظمات:

1. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

مثال و أنشطة:
حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة: $5x+7y+3=0$

2. نظمة معادلتين:

طريقة التعويض:
مثال: حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية: $\begin{cases} 4x+y=10 \\ 5x+2y=-19 \end{cases}$

طريقة الخطية:
مثال: حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية: $\begin{cases} 4x-3y=-1 \\ 9x-5y=3 \end{cases}$

طريقة المحددة:
مثال:
حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+4y=2 \end{cases}$

محددة النظمة (1) هي: $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=6$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{6}=\dfrac{12}{6}=2$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{6}=\dfrac{6}{6}=1$ و منه حل النظمة هو الزوج $(2,1)$