

دالة الجذر من الرتبة n ($n \in \mathbb{N}^*$)

(محمد الكيال)

القوى الجذرية

← خاصة وتعريف:

الدالة: $x \mapsto x^n$ المعرفة على \mathbb{R}^+ تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n
 $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 ويرمز لها بالرمز: $\sqrt[n]{\cdot}$
 $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

حالات خاصة:

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$
- العدد: $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب لـ x

← خصائص:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$$

ملاحظة هامة:

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

← مجموعة التعريف:

مجموعة تعريفها:	الدالة f معرفة كما يلي:
$D_f = [0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$

← النهايات:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)}$	←	$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$
$\sqrt[n]{\ell}$		$\ell \geq 0$
$+\infty$		$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على \mathbb{R}^+
 إذا كانت u دالة موجبة و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$
 ولدنيا: $\forall x \in]0; +\infty[\quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

إذا كانت u دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I
 ولدنيا: $\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}}$

حل المعادلة: $x^n = a$ ($a \in \mathbb{R}$) $x \in \mathbb{R}$

عدد زوجي n	عدد فردي n	
$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$a > 0$
$S = \{0\}$	$S = \{0\}$	$a = 0$
$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$	$a < 0$

القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

ليكن $r = \frac{p}{q}$ عدداً جذرياً غير منعدم حيث: $p \in \mathbb{Z}^*$ و $q \in \mathbb{N}^*$
 $\forall x \in]0; +\infty[\quad x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

ملاحظات:

- $\forall x \in]0; +\infty[\quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- مجموعة تعريف دالة عددية f لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $(r \in \mathbb{Q}^*) \quad f(x) = [u(x)]^r$ هي: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left(\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$$

لكل عنصرين x و y من \mathbb{R}_+^* ولكل عنصرين r و r' من \mathbb{Q}^*

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad \left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$$

$$(x \times y)^r = x^r \times y^r \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\left(\frac{x^r}{y^{r'}}\right) = x^{r-r'} \quad \frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'}$$