الأعداد العقدية (محمد الكيال)

مجموعة الأعداد العقدية هي: $\mathbb{C}=\{z=a+ib/(a;b)\in\mathbb{R}^2 \text{ و } i^2=-1\}$

الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

- $a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز: $Re(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز: $Im(z)$

حالتان خاصتان: إذا كان: $Im(z)=0$ فإن z هو عدد حقيقي

إذا كان: $Re(z)=0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

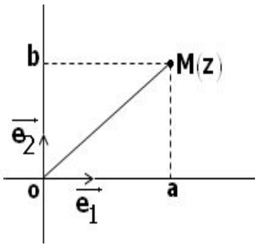
تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$z=z' \Leftrightarrow Re(z)=Re(z')$ و $Im(z)=Im(z')$

التمثيل المبياني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{e_1},\vec{e_2})$



ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

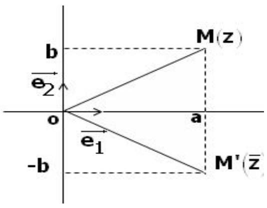
نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a,b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب: $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب: $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z=Aff(\overrightarrow{OM})$

مرافق عدد عقدي:

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

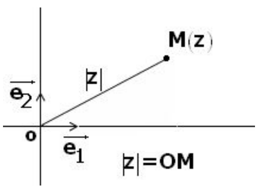
مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\bar{z}=a-ib$



$M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$	$\bar{z}=z \Leftrightarrow$ عدد حقيقي z
$\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$	$\bar{z}=-z \Leftrightarrow$ عدد تخيلي صرف z
$\overline{z^n}=\bar{z}^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$z+\bar{z}=2Re(z)$
$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z'}}$	$z-\bar{z}=2i\,Im(z)$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $(z'\neq 0)$	$z\bar{z}=[Re(z)]^2+[Im(z)]^2$

معيار عدد عقدي:



ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب: $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\left|z^n\right| = |z|^n \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right) \qquad \left|z \times z'\right| = |z| \times |z'|$$
$$|-z| = |z| \qquad \left|\overline{z}\right| = |z|$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0) \qquad \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$$

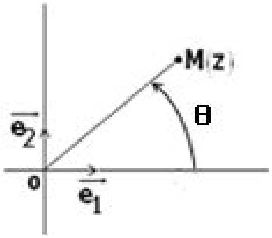
⬅الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة: $\left(\overrightarrow{e_1}, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right)$

و نرمز له بالرمز: $\arg z$

ونكتب: $\arg z = \theta[2\pi]$



ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta[2\pi]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$
- الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a, 0]$	$a = [-a, \pi]$
$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$

- $\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
- $\arg \overline{z} \equiv -\arg z[2\pi]$
- $-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
- $\arg z^n \equiv n \arg z \; [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \; [2\pi]$
- $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z') \; [2\pi]$

- $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$
- $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$
- $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$
- $[r, \theta]^n = \left[r^n; n\theta\right]$
- $\frac{1}{[r'; \theta']} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$
- $\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
- $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$

- $\arg z = k\pi \Leftrightarrow$ z عدد حقيقي
- $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$ z عدد تخيلي صرف $\quad (k \in \mathbb{Z})$

⬅صيغة موافر:

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\theta + i\sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

⬅صيغتا أولير:

$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ و $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

⬅حل المعادلة $z^2 = a$ $z \in \mathbb{C}$ حيث $(a \in \mathbb{R})$:

المعادلة		مجموعة حلول المعادلة
$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$	$a > 0$	$S = \left\{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\right\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a < 0$	$S = \left\{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\right\}$

حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ حيث: $z\in\mathbb{C}$ و a و b و c أعداد حقيقية $(a\neq 0)$

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z\in\mathbb{C}\quad az^2+bz+c=0$ $\left(\Delta=b^2-4ac\right)$	$\Delta>0$	$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta<0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
المسافة AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
منتصف I القطعة $[A;B]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$	$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A و B و C نقط مستقيمية	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
A و B و C و D نقط متداورة	$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\in\mathbb{R}$ أو $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$\lvert z-z_A\rvert=r$ $(r>0)$	• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	• $AM=BM$ • M تنتمي إلى واسط $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC مثلث متساوي الساقين في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC مثلث متساوي الأضلاع

تمثلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل:	التمثيل العقدي:
الإزاحة: $t_{\vec{u}}$	$z'=z+b$ حيث: b لحق المتجهة $\vec{u}$
التحاكي: $h(\Omega;k)$	$z'-\omega=k(z-\omega)$ حيث: ω لحق النقطة Ω
الدوران: $r(\Omega;\theta)$	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث: ω لحق النقطة Ω