المرجح

القدرات المنتظرة

- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛
- إنشاء مرجح n نقطة $(2 \leq n \leq 4)$؛
- استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛
- استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛
- استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.

I- مرجح نقطتين

1- النقطة المتزنة

تعريف

لتكن A نقطة من المستوى و α عددا حقيقيا
الزوج $(A;\alpha)$ يسمى نقطة متزنة. نقول كذلك النقطة A معينة بالمعامل α. أو العدد α وزن النقطة A.

2- مرجح نقطتين

أنشطة

I) لتكن A و B نقطتين مختلفتين
1- بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها
2- بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها

II) لتكن A و B نقطتين مختلفتين و α و β عددين حقيقيين غير منعدمين
1- بين اذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فان توجد نقطة وحيدة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فانه لا توجد أية نقطة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ نقطتين متزنتين من المستوى حيث $\alpha + \beta \neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فان النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ لا تقبلان مرجحا.

3- مركز ثقل نقطتين

تعريف

مركز ثقل نقطتين A و B هو مرجح A و B المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصية

مركز ثقل نقطتين A و B هو منتصف $[AB]$

4- الصمود

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\quad \alpha + \beta \neq 0$

$\Leftrightarrow k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad k\alpha + k\beta \neq 0$

$\Leftrightarrow$ G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;k\alpha)$ و $(B;k\beta)$

خاصية

مرجح نقطتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

تمرين

حدد α و β حيث G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ في الحالتين
أ- $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{AB}$
ب- A مركز ثقل G و B.

5- الخاصة المميزة

نشاط

ليكن α و β عددين حقيقيين حيث $\alpha+\beta\neq 0$

1- بين أن G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ تكافئ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ $\forall M\in(P)$

2- ننسب المستوى (P) إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ/ بين أن $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

ب/ استنتج إحداثيتي G علما أن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

ج/ حدد إحداثيتي G' مرجح مرجح $(A;-5)$ و $(B;2)$ حيث $A(-2;3)$ و $B(1;4)$

مبرهنة

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

نتيجة

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{BA}$

ملاحظة

مرجح نقطتين مختلفتين A و B تنتمي إلى المستقيم (AB)

6- إحداثيتا مرجح نقطتين

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و $G(x_G;y_G)$

إذا كان G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فان
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\end{cases}$$

تمرين

أنشئ G مرجح $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ G' مرجح $(A;2)$ و $(B;1)$

أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

تمرين

أنشئ I مرجح $(A;2)$ و $(C;1)$ ثم J مرجح $(A;1)$ و $(B;2)$ و K مرجح $(C;1)$ و $(B;-4)$

1- أثبت أن B مرجح $(C;1)$ و $(K;3)$

2- بين أن J منتصف $[KI]$.

تمرين

لتكن $A\neq B$

1- حدد مجموعة النقط M حيث $\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=0$

2- حدد مجموعة النقط M حيث $\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|$

تمرين حدد إحداثيتي G مرجح $(A;-2)$ و $(B;6)$ حيث $A(-1;2)$ و $B(-4;3)$

II- مرجح ثلاث نقط

1- أنشطة

نشاط1

لتكن A و B و C ثلث نقط من المستوى
1- أنشئ G حيث $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
2- هل يمكن إنشاء G حيث $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

نشاط2

لتكن A و B و C نقط مختلفة و α و β و λ أعداد حقيقية

نحدد G حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ $(*)$

الجواب

لدينا $(*)$ تكافئ $(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$

*- إذا كان $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$ فان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{(\alpha+\beta+\lambda)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{(\alpha+\beta+\lambda)}\overrightarrow{AC}$

ومنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

*- إذا كان $\alpha+\beta+\lambda=0$ فان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فانه لا توجد نقطة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ فان جميع نقط المستوى تحقق $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ نقط متزنة من المستوى حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha+\beta+\lambda=0$ فان النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ لا تقبل مرجحا

3- مركز ثقل ثلاث نقط

تعريف

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح A و B و C المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصية

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

خاصية

متوسطات مثلث ABC تتلاقى في نقطة وحيدة G هي مركز ثقل المثلث ABC

و تحقق $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

اذا كان A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي فان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ و

$\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ و $\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

4- خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

5- الخاصية المميزة

نشاط

α و β و λ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$

1- بين أن G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ تكافئ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

2- ننسب المستوى (P) إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ/ بين أن $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OC}$

ب/ استنتج إحداثيتي G علما أن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

مبرهنة

α و β و λ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$
تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

6- إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ و
$G(x_G;y_G)$ إذا كان G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ فان
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\lambda x_C}{\alpha+\beta+\lambda} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\lambda y_C}{\alpha+\beta+\lambda}\end{cases}$$

7- خاصية التجميعية

α و β و λ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$
G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ ومنه $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

* لو كان $\alpha+\beta\neq 0$ فان $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ تقبل مرجحا G_1 ومنه $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}$
وبالتالي $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}+\lambda\overrightarrow{MC}=((\alpha+\beta)+\lambda)\overrightarrow{MG}$
إذن G مرجح $(G_1;\alpha+\beta)$ و $(C;\lambda)$

* بنفس الطريقة نبين أن G مرجح $(G_2;\alpha+\lambda)$ و $(B;\beta)$ حيث G_2 مرجح $(A;\alpha)$ و $(C;\lambda)$

* بنفس الطريقة نبين أن G مرجح $(G_3;\beta+\lambda)$ و $(A;\alpha)$ حيث G_2 مرجح $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$

خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم.

تمرين

أنشئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$
أنشئ G' مرجح $(A;-3)$ و $(B;2)$ و $(C;-1)$

تمرين

ABC مثلث و G مرجح $(A;1)$ و $(B;4)$ و $(C;-2)$ و D نقطة حيث $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

أنشئ الشكل
بين أن D و C و G مستقيمية

تمرين

ABC مثلث. حدد مجموعة النقط M حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

III- مرجح أربع نقط

1- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ نقط متزنة من المستوى حيث
$\alpha+\beta+\lambda+\mu\neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}+\mu\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
النقطة G تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha+\beta+\lambda+\mu=0$ فان النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ لا تقبل مرجحا

2- مركز ثقل أربع نقط

تعريف

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D هو مرجح A و B و C و D المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصية

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$

3- خاصية

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

4- الخاصية المميزة

مبرهنة

α و β و λ و μ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda+\mu\neq 0$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}+\mu\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda+\mu)\overrightarrow{MG}$

5- خاصية التجميعية

خاصية

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها معينا بمجموع معاملاتها.

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع

أنشئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$ و $(D;1)$

بين أن $G\in(AC)$