الأستاذ محمد الرقبة

عموميــات حـول الــدوال

1) الدالة التآلفية La fonction affine

المستوى منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(ℓ_f) يرمز إلى منحنى دالة f بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أنشطة

① • أرسم التمثيل المبياني للدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-1$, $g(x)=-x+2$

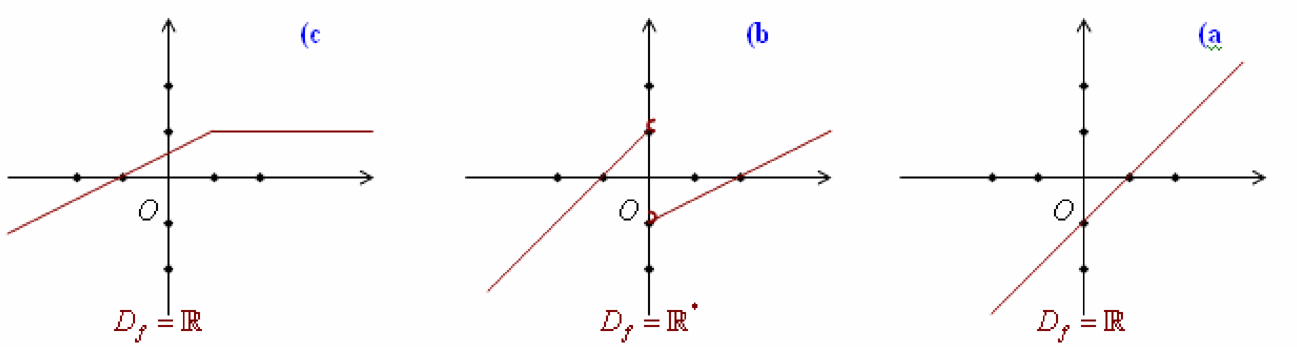
• استنتج التمثيل المبياني للدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي : $l(x)=f(|x|)$ و $h(x)=|g(x)|$

② أوجد الدالة التآلفية التي يمر تمثيلها المبياني من النقطتين $A(1,0)$ و $B(2,1)$

③ حدد الدالة التآلفية التي يمر منحناها من النقطة $A(1,0)$

ولكل عددين حقيقيين x_1 و x_2 : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{2}$

④ حدد في كل حالة من الحالات التالية الدالة f التي تمثيلها المبياني هو :



⑤ مثل مبيانيا الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=-x & , \ x\le 0 \\ f(x)=2x & , \ 0\le x\prec 1 \\ f(x)=-2x+4 & , \ 1\le x \end{cases}$$

خلاصة

تعريف الدالة التآلفية هي كل دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان.

خاصية منحنى دالة تآلفية في المستوى المنسوب إلى معلم هو مستقيم.

2) زوجية دالة Parité d'une fonction

أنشطة

① أدرس زوجية الدوال التالية :

-a $f(x)=|x|$

-b $f(x)=|x+1|$

-c $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

-d $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

-e $f(x)=x+\frac{1}{x}$

-f $f(x)=x^3$

-g $f(x)=\sqrt{x^2-2|x|+1}$

2) مجموع دالتين زوجيتين هو دالة زوجية

جداء دالتين زوجيتين هو دالة زوجية

② لتكن P دالة حدودية زوجية.

بين أن الشكل المختصر للحدودية $P(x)$ لا يحتوي إلا على حدود درجتها زوجية.

3) مجموع دالتين فرديتين هو دالة فردية

جداء دالتين فرديتين هو دالة زوجية

③ لتكن P دالة حدودية فردية.

بين أن الشكل المختصر للحدودية $P(x)$ لا يحتوي إلا على حدود درجتها زوجية؟

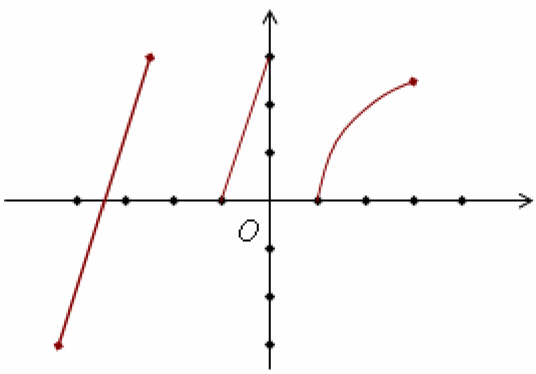
④ مثل مبيانيا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

f زوجية ولكل x من $\mathbb{R}^+$: $f(x)=x+1$

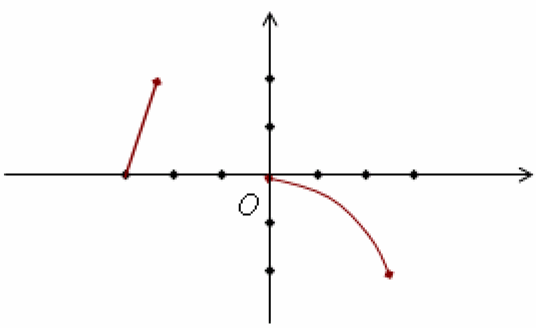
⑤ مثل مبيانيا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

f فردية ولكل x من $\mathbb{R}^+$: $f(x)=-x+1$

② ⑥ أتمم المنحنى (ℓ) إذا علمت أنه يمثل دالة زوجية حيز تعريفها هو : $[-4,4]$



③ ⑦ أتمم المنحنى (ℓ) إذا علمت أنه يمثل دالة فردية حيز تعريفها هو : $[-3,3]$



خلاصة :

الدالة الزوجية **La fonction paire**

تعريف : لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان :

a- لكل x من D_f : $-x \in D_f$

b- لكل x من D_f : $f(-x)=f(x)$

خاصية : لتكن f دالة عددية و (ℓ_f) منحناها في معلم متعامد.

تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان (ℓ_f) متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.

الدالة الفردية La fonction impaire

تعريف : لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة فردية إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

a- لكل x من D_f : $-x \in D_f$

b- لكل x من D_f : $f(-x)=-f(x)$

خاصية : لتكن f دالة عددية و (ℓ_f) منحناها في معلم متعامد.

تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان (ℓ_f) متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.

ملاحظة : إذا كان (ℓ_f) غير متماثل بالنسبة للصفر

فإن f ليست لا فردية ولا زوجية.

3) رتابة دالة Monotonie d'une fonction

أنشطة

① لتكن f الدالة التآلفية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان.

- أدرس رتابة الدالة f
- ماذا يمكنك استنتاجه " حسب قيم a " ؟
- استنتج رتابة الدالة g المعرفة بـ :

$$\begin{cases} g(x)=2x-1 & , \ x\geq 1 \\ g(x)=-x+2 & , \ x\prec 1 \end{cases}$$

② أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ حيث : $f(x)=x^2-3x+2$

③ أدرس رتابة الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

④ أتمم الجدول التالي علما أنه يمثل التغيرات على $[-2,2]$ لدالة فردية.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1 ↘	-2 ↗			

نفس السؤال إذا كانت f زوجية.

خلاصة

تعريف : لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

ليكن x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من D_f.

العدد الحقيقي $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ يسمى معدل تغير f بين العددين x_1 و x_2.

خاصيات

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I.

- تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط إذا كان $0 \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ لكل x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I.
- تكون f تناقصية (قطعا) على I إذا وفقط إذا كان $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le 0$ لكل عنصرين مختلفين x_1 و x_2 من I.

ملاحظات :

ملاحظة① : لتكن f الدالة التآلفية المعرفة بـ $f(x)=ax+b$.

- إذا كان $a \succ 0$ فإن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
- إذا كان $a \prec 0$ فإن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.
- إذا كان $a = 0$ فإن f ثابتة على $\mathbb{R}$.

ملاحظة① : " الرتابة والزوجية "

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D

و I مجال حيث $I \subset D \cap \mathbb{R}^+$ أو $I \subset D \cap \mathbb{R}^-$

وليكن J مماثل I بالنسبة للصفر.

الحالة① f فردية

f تزايدية على I يكافئ f تزايدية على J.

f تزايدية قطعا على I يكافئ f تزايدية قطعا على J.

f تناقصية (قطعا) على I يكافئ f تناقصية (قطعا) على J.

الحالة② f زوجية

f تزايدية (قطعا) على I يكافئ f تناقصية (قطعا) على J.

f تناقصية (قطعا) على I يكافئ f تزايدية (قطعا) على J.

4) الدالة الموجبة – الدالة السالبة

Fonction positive – Fonction négative.

أنشطة.

① لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=-x^2+2x-3$

- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=-(x-1)^2-2$

② لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2+3x+4$

- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $0 \le f(x)$

تعريف لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D.

- نقول إن f دالة موجبة على D إذا كان $f(x) \ge 0$ ، لكل x من D

ونكتب $f \ge 0$

- ونقول إن f دالة سالبة على D إذا كان لكل x من D ، $f(x) \le 0$

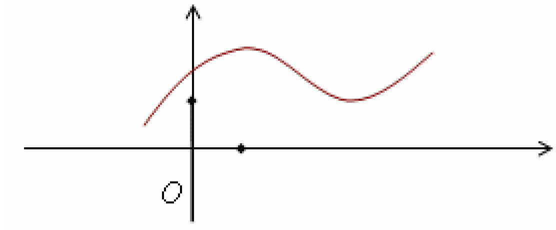
ونكتب $f \leq 0$

- **ملاحظة** إذا كان لكل x من D : $0 \prec f(x)$ نقول أن f موجبة قطعا
ونكتب $0 \prec f$
- إذا كان لكل x من D : $f(x) \prec 0$ نقول أن f سالبة قطعا
ونكتب $f \prec 0$

التأويـل المبيانـي

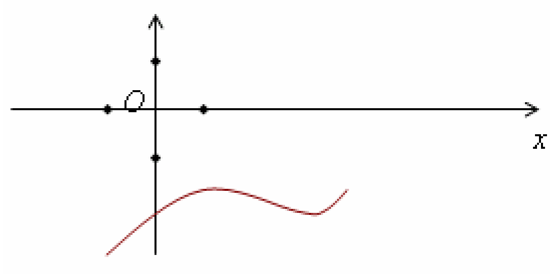
- المستوى منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
و f دالة عددية معرفة على D.

- تكون f موجبة على D إذا وفقط إذا كان المنحنى الممثل لها على D



يوجد في نصف المستوى الذي أراتيبه موجبة.

- تكون f سالبة على D إذا وفقط إذا كان المنحنى الممثل لها على D
يوجد في نصف المستوى الذي أراتيبه سالبة.



تطبيقــات : حدد إشارة الدوال التالية :

$$f \ : x \mapsto \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$$

$$g \ : x \mapsto x^2+x+1$$

5) مقارنة دالتين Comparaison de deux fonctions

تمهيد : لتكن f و g الدالتين المعرفتين بما يلي :

$$f(x) = 2x^2-3x+2$$

و $$g(x) = x^2-3x+1$$

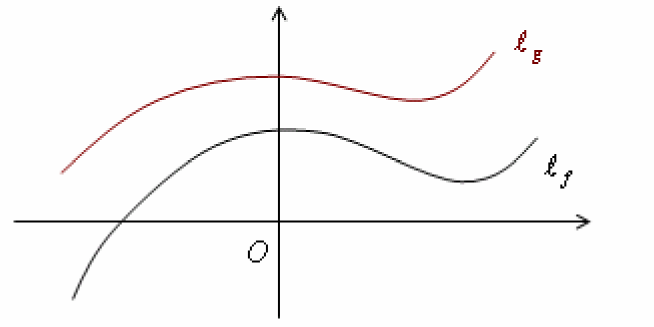
- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ $f(x)-g(x) \succ 0$
نلاحظ أن لكل x من $\mathbb{R}$ $f(x) \succ g(x)$
ونقول أن f أكبر من g.
ونكتب $f \succ g$

تعريف لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على نفس المجموعة D.
نقول إن f أصغر من أو تساوي g (أو g أكبر من أو تساوي f) على D إذا كان لكل x من D : $f(x) \leq g(x)$
ونكتب $f \leq g$ على D.

التأويـل المبيانــي Interprétation graphique

لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجموعة.

نقول أن f أصغر من أو تساوي g على D إذا وفقط إذا كان منحنى f تحت منحنى g على D.



تمرين تطبيقي

قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=4x^2$$

و $$g(x)=4x-1$$

6) الدالة المكبورة – الدالة المصغورة – الدالة المحدودة
Fonction Majorée, Minorée, Bornée

تعريف تكن f دالة عددية معرفة على مجموعة D.

نقول إن f مكبورة على D إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي η بحيث

لكل x من D : $f(x)\le\eta$

. ...

. ...

خاصية لتكن f دالة عددية معرفة على D.

تكون f محدودة على D إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث :

لكل x من D : $|f(x)|\le k$

تمرين تطبيقي

① بين أن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ محدودة.

② لتكن f الدالة المعرفة على $D=]1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

- بين أن f مصغورة بالعدد 0
- هل f مكبورة ؟

7) مطارف دالة عددية Extremums d’une fonction numérique

تمهيد :

① لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

بين أن f تقبل قيمة قصوى مطلقة عند النقطة **0** .

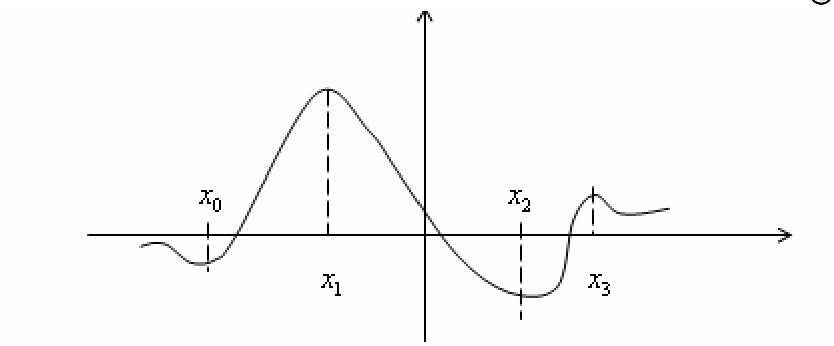
② لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

بين أن f تقبل قيمة دنيا مطلقة عند النقطة **0** .

③ حدد مطارف الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & , \quad 1\le |x| \\ x & , \quad -1\prec x\prec 1\end{cases}$$

④



خلاصة : " تعاريف"

- القيمة القصوى المطلقة Valeur minimale absolue
- القيمة القصوى النسبية
- القيمة الدنيا المطلقة
- القيمة الدنيا النسبية

" خاصيات"

① - إذا كانت f رتيبة على المجال $I=[a,b]$

فإن $\max\limits_{x\in I} f(x)=Sup\left(f(a),f(b)\right)$

و $\min\limits_{x\in I} f(x)=Inf\left(f(a),f(b)\right)$

خلاصـــة

(8

① الدالة الحدودية من الدرجة الثانية

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$

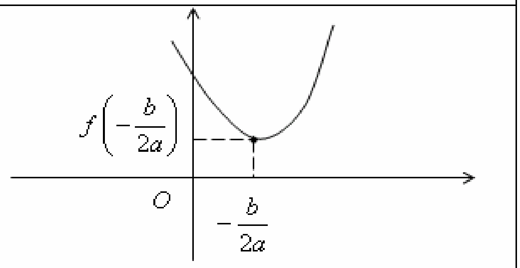
المستقيم ذو المعادلة $x = -\dfrac{b}{2a}$ محور تماثل للمنحنى ℓ.

النقطة $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ هي رأس الشلجم

إذا كانت $0 \prec a$

- f تقبل قيمة دنيا مطلقة عند $-\dfrac{b}{2a}$

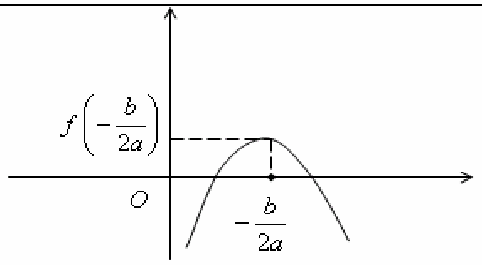
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗	



إذا كانت $a \prec 0$

- f تقبل قيمة قصوى عند $-\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘	



(9

② الدالة المتخاطـة

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، $ad - bc \neq 0$

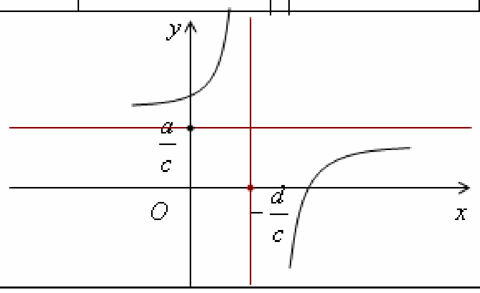
$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

المنحنى ℓ_f هو هذلول مركزه $\Omega\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$

المقاربين هما : $D\left(x = -\dfrac{d}{c}\right)$ و $\Delta\left(y = \dfrac{a}{c}\right)$

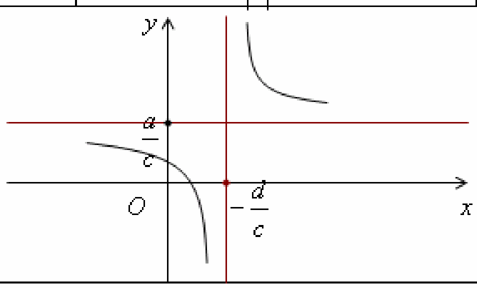
إذا كانت $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \succ 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	



إذا كانت $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \prec 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	



(10 ①- دراسة الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$

②- دراسة الدالة $x \mapsto \sqrt{a+x}$

③- دراسة الدالة $x \mapsto ax^3$

11) - صورة مجال بدالة عددية.

12) مركب دالتين عدديتين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f\left(x\right)=x^{2}+1$

و g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بما يلي : $g\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1) أحسب $f\left(1\right)$ ثم $g\left(2\right)$

2) أحسب $f\left(2\right)$ ثم $g\left(5\right)$

- لاحظ أن

$$g\left(2\right)=g\left(f\left(1\right)\right)=5$$

و $g\left(5\right)=g\left(f\left(2\right)\right)$

ونكتب $gof\left(1\right)=5$

و $gof\left(2\right)=\dfrac{11}{4}$

ونقول إن 5 هي صورة 1 بمركبة الدالتين g و f (أو بتركيب الدالتين g و f).

3) أحسب $f\left(0\right)$

هل يمكن حساب صورة $f\left(0\right)$ بالدالة g ؟

4) حدد مجموعة تعريف الدالة gof ، D

ثم حدد $gof\left(x\right)$ لكل x من D.

5) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-3}{x^{2}+1}$

أكتب h على شكل مركبة دالتين وحددهما.

6) لتكن f و g الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f\left(x\right)=2x+1$ و $g\left(x\right)=x^{2}+1$

حدد الدالتين fog و gof.

7) $f\left(x\right)=x^{2}+x-2$ و $g\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x+1}$

- حدد D_{gof} و D_{fog}

- حدد الدالتين gof و fog.