عموميات حول الدوال العددية

I ـ الدالة المكبورة ـ الدالة المصغورة ـ الدالة المحدودة :

1) نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+1}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أن $f(x)\prec 2$ لكل x من D_f .
3. بين أن $f(x)\geq 1$ لكل x من D_f .
4. استنتج أن $1\leq f(x)\prec 2$ لكل x من D_f .

الحل :

1. لدينا : لكل x من IR : $x^2+1\succ 0$ وبالتالي فإن : $D_f=IR$
2. نبين أن $f(x)\prec 2$ لكل x من IR :

لدينا : $\forall x\in IR\ :\ f(x)-2=\frac{2x^2+1}{x^2+1}-2=\frac{2x^2+1-2x^2-2}{x^2+1}=\frac{-1}{x^2+1}\prec 0$

إذن : $f(x)\prec 2$ لكل x من IR . نقول إن الدالة f مكبورة بالعدد 2 على IR .

3. نبين أن $f(x)\geq 1$ لكل x من IR :

لدينا : $\forall x\in IR\ :\ f(x)-1=\frac{2x^2+1}{x^2+1}-1=\frac{2x^2+1-x^2-1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}\geq 0$

إذن : $f(x)\geq 1$ لكل x من IR . نقول إن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على IR .

4. استنتاج أن $1\leq f(x)\prec 2$ لكل x من IR :
5. لدينا : $f(x)\geq 1$ و $f(x)\prec 2$ لكل x من IR . إذن : $1\leq f(x)\prec 2$ لكل x من IR .

نقول إن الدالة f محدودة على IR . (مكبورة ومصغورة على IR)

2) تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f .

1. نقول إن f مكبورة على D_f إذا يوجد عدد حقيقي M بحيث : $\forall x\in D_f\ :\ f(x)\leq M$ (أو $(\forall x\in D_f\ \ f(x)\prec M)$.
2. نقول إن f مصغورة على D_f إذا يوجد عدد حقيقي m بحيث : $\forall x\in D_f :\ f(x)\geq m$ (أو $(\ \forall x\in D_f\ \ f(x)\succ m)$.
3. نقول إن f محدودة على D_f إذا مكبورة ومصغورة على D_f ؛ أي يوجد عددين حقيقيين m و M بحيث : $\forall x\in D_f\ :\ m\leq f(x)\leq M$.

تمرين 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على D_f .
3. بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على D_f .
4. استنتج أن الدالة f محدودة على D_f .

الحل :

1. تكون f معرفة إذا كان $x^2+3x+3\neq 0$

نعتبر المعادلة $x^2+3x+3=0$: مميز هذه المعادلة هو $\Delta=9-4\times 3=-3\prec 0$

إذن $x^2+3x+3\succ 0$ لكل x IR وبالتالي فإن $x^2+3x+3\neq 0$ لكل x IR ؛ إذن : $D_f=IR$

2. **نبين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على IR :**

لدينا : $f(x)-\frac{7}{3}=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\frac{7}{3}=\frac{6x^2+21x+21-7x^2-21x-21}{3(x^2+3x+3)}=\frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}$

بما أن : $x^2+3x+3\succ 0$ لكل x IR و $-x^2\leq 0$ لكل x IR فإن : $f(x)-\frac{7}{3}\leq 0$ لكل x IR

إذن : $f(x)\leq\frac{7}{3}$ لكل x IR . وبالتالي فإن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على IR .

3. نبين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على IR :

لدينا : $f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7-x^2-3x-3}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$

بما أن : $x^2+3x+3\succ 0$ لكل x IR و $(x+2)^2\geq 0$ لكل x IR فإن : $f(x)-1\geq 0$ لكل x IR

إذن : $f(x)\geq 1$ لكل x من IR .

وبالتالي فإن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على IR .

4. استنتاج أن الدالة f محدودة على IR :

لدينا : $f(x)\geq 1$ و $f(x)\leq\frac{7}{3}$ لكل x IR . إذن : $1\leq f(x)\leq\frac{7}{3}$ لكل x من IR .

وبالتالي فإن الدالة f محدودة على IR . (مكبورة ومصغورة على IR)

تمرين 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=2+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أن f مكبورة بالعدد 3 على D_f .
3. بين أن f مصغورة بالعدد 1 على D_f .
4. استنتج أن f محدودة على D_f .

3) خاصيات :

خاصية 1 :

ـ إذا كانت f مكبورة بعدد حقيقي M فإن f مكبورة بكل عدد حقيقي N حيث $N\geq M$.

ـ إذا كانت f مصغورة بعدد حقيقي m فإن f مصغورة بكل عدد حقيقي n حيث $n\leq m$.

نشاط تمهيدي :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f .

1. بين أنه إذا كان يوجد عدد حقيقي $\alpha\succ 0$ بحيث : $|f(x)|\leq\alpha$ لكل x من D_f فإن f محدودة على D_f .
2. نفترض أن f محدودة على D_f : بين أنه يوجد عدد حقيقي $\alpha\succ 0$ بحيث : $|f(x)|\leq\alpha$ لكل x من D_f .

خاصية 2 :

تكون f محدودة على D_f إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $\alpha\succ 0$ بحيث : $|f(x)|\leq\alpha$ لكل x من D_f

(أو : $|f(x)|\prec\alpha$ لكل x من D_f) .

تمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\frac{x^4-x^2}{x^4+1}$.

1. بين أن f دالة محدودة نعلى IR .
2. بين أن f مكبورة بالعدد 1 ومصغورة بالعدد α حيث α هو أصغر حلي المعادلة $4t^2-4t-1=0$.

تمرين 4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x^4-4x+1$.

1. بين أن f تناقصية على المجال $[0;1]$.
2. استنتج أن f مكبورة بالعدد 1 ومصغورة بالعدد -2 على المجال $[0;1]$.

تمرين 5 :

بين أن الدوال التالية محدودة على IR : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$ ؛ $g(x)=\frac{x\sin x}{1+x^2}$ ؛ $h(x)=\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.

II ـ الدالة الدورية :

1) نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\cos x$.

لدينا : لكل x من IR : $(x+2\pi)\in IR$ و $f(x+2\pi)=f(x)$.

نقول إن الدالة f دورية ودورها 2π .

* هل الدالة g المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=\sin x$ دورية ؟ ما هو دورها ؟

* هل الدالة h المعرفة على IR بما يلي : $h(x)=\tan x$ دورية ؟ ما هو دورها ؟

2) تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f .

نقول إن f دالة دورية إذا كان يوجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث :

1. لكل x من D_f لدينا : $x+T\in D_f$.
2. لكل x من D_f لدينا : $f(x+T)=f(x)$.

العدد T يسمى دور الدالة f .

خاصية :

إذا كان T دورا للدالة f فإن لكل k من Z لدينا : $f(x+kT)=f(x)\quad;\quad \forall x\in D_f$.

ملاحظة :

إذا كانت f دالة عددية حيز تعريفها D_f و T دورا لها فإنه :

- يكفي دراسة تغيرات الدالة على المجموعة $D_f\cap[0;T]$ أو $D_f\cap\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.
- نستنتج جزء منحنى f على $(k\in Z)$; $D_f\cap\left[-\frac{T}{2}+(k+1)T;\frac{T}{2}+(k+1)T\right]$ من جزء منحنى f على $D_f\cap\left[-\frac{T}{2}+kT;\frac{T}{2}+kT\right]$ بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(T;0)$ ($T\vec{i}$)

مثال :

التمثيل المبياني للدالة $x\mapsto\cos x$.

ندرس تغيرات الدالة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ وننشئ منحناها على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ونستنتج منحناها على كل مجال $\left[-\frac{\pi}{2}+k(2\pi);\frac{\pi}{2}+k(2\pi)\right]$ ؛ $(k\in Z)$ بالإزاحة ذات المتجهة $(2\pi)\vec{i}$.

تمرين 6 :

ليكن a عدد حقيقيا موجبا قطعا .

بين أن الدوال التالية دورية وحدد دور كل منها : $f(x)=\sin ax$ ؛ $g(x)=\cos ax$ ؛ $h(x)=\tan ax$.

III ـ مقارنة دالتين :

1) الدالة الموجبة ـ الدالة السالبة :

تعريف :

f دالة عددية حيز تعريفها D_f .

- نقول إن f دالة موجبة على D_f إذا كان : $f(x) \geq 0$ لكل x من D_f . ونكتب : $f \geq 0$ على D_f .
- نقول إن f دالة سالبة على D_f إذا كان : $f(x) \leq 0$ لكل x من D_f . ونكتب : $f \leq 0$ على D_f .

أمثلة : ـ الدالة : $f : x \mapsto |x|$ موجبة على IR .

ـ الدالة : $g : x \mapsto 1-x^2$ موجبة على $[-1,1]$ وسالبة على $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

ـ الدالة : $h : x \mapsto -x^2$ سالبة على IR .

مثل هذه الدوال في معلم متعامد ممنظم .

ملاحظة :

تكون f دالة موجبة على D_f إذا كانت مصغورة بالعدد 0 على D_f ؛ وتكون سالبة إذا كانت مكبورة بالعدد 0

التأويل المبياني :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ، و (C_f) منحناها في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- تكون f دالة موجبة على D_f إذا وفقط إذا كان (C_f) يوجد فوق محور الأفاصيل .
- تكون f دالة سالبة على D_f إذا وفقط إذا كان (C_f) يوجد تحت محور الأفاصيل .

تمرين تطبيقي :

ادرس إشارة الدالة f بحيث : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{-2x^2+3x-3}$.

2) مقارنة دالتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجموعة D .

نقول إن f أصغر من أو تساوي g على D إذا كان : $f(x) \leq g(x)$ لكل x من D ونكتب : $f \leq g$ على D .

نقول إن f أصغر قطعا من g على D إذا كان : $f(x) \prec g(x)$ لكل x من D ونكتب : $f \prec g$ على D .

ملاحظات :

- تكون $f \leq g$ على D إذا وفقط إذا كان : $f-g \leq 0$ على D .
- لا يمكن أن نقارن دالتين إلا إذا كان لهما نفس مجموعة التعريف .

التأويل المبياني :

خاصية :

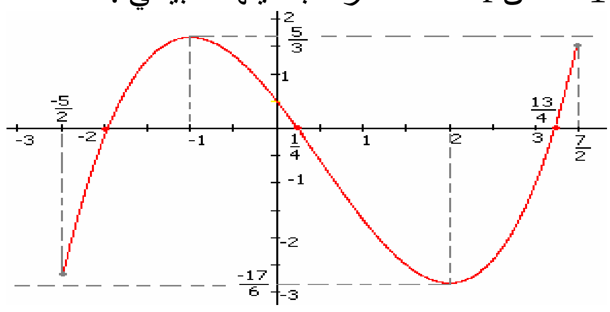
لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجموعة D . ولتكن (C_f) و (C_g) منحناهما في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تكون $f \leq g$ على D إذا وفقط إذا كان : (C_f) يوجد تحت (C_g) .

IV ـ مطاريف دالة :

نشاط تمهيدي :

1 ـ لتكن f الدالة المعرفة بتمثيلها المبياني :



* تحقق أن : $\forall x \in]0;3[\ : f(x) \geq f(2)$.

نقول إن الدالة f تقبل قيمة دنوية في 2 هي $f(2) = -\dfrac{17}{6}$.

* تحقق أن : $\forall x \in]-2;0[\ : f(x) \leq f(-1)$.

نقول إن الدالة f تقبل قيمة قصوية في -1 هي $f(-1) = \dfrac{5}{3}$.

1) تعاريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ؛ وليكن a عنصرا من D_f .
1) نقول إن f تقبل قيمة دنوية في a إذا كان a ينتمي إلى مجال مفتوح I ($I \subset D_f$) بحيث :
$$\forall x \in I \quad ; \quad f(x) \geq f(a)$$
2) نقول إن f تقبل قيمة قصوية في a إذا كان a ينتمي إلى مجال مفتوح I ($I \subset D_f$) بحيث :
$$\forall x \in I \quad ; \quad f(x) \leq f(a)$$
3) القيم القصوية و القيم الدنوية تسمى مطاريف دالة .

2 ـ تعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-3;2]$ وجدول تغيراتها هو :

↘ ↗ ↘

الدالة g تقبل قيمة دنوية في 0 هي $g(0) = 2$
الدالة g تقبل قيمة قصوية في 1 هي $g(1) = 4$

V ـ رتابة دالة :

1) تعاريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ، و I مجالا D_f .

- f تزايدية على I يعني أنه لكل عنصرين x و y من I لدينا : إذا كان $x \prec y$ فإن $f(x) \leq f(y)$.
- f تزايدية قطعا على I يعني أنه لكل عنصرين x و y من I لدينا : إذا كان $x \prec y$ فإن $f(x) \prec f(y)$.
- f تناقصية على I يعني أنه لكل عنصرين x و y من I لدينا : إذا كان $x \prec y$ فإن $f(x) \geq f(y)$.
- f تناقصية قطعا على I يعني أنه لكل عنصرين x و y من I لدينا : إذا كان $x \prec y$ فإن $f(x) \succ f(y)$.
- إذا كان $f(x) = f(y)$ لكل عنصرين x و y من I فإن الدالة f ثابتة على I ، أي : يوجد عنصر c من IR بحيث : $f(x) = c$ لكل x من I .
- f رتيبة على I يعني أن f تزايدية على I أو f تناقصية على I .
- f رتيبة قطعا على I يعني أن f تزايدية قطعا على I أو f تناقصية قطعا على I .

2. معدل تغير دالة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ، و x و y عنصرين مختلفين من D_f .
العدد الحقيقي : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x و y .

خاصيات :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ، و I مجالا D_f .

- f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ لكل x و y عنصرين مختلفين من I .
- f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$ لكل x و y عنصرين مختلفين من I .
- f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$ لكل x و y عنصرين مختلفين من I .
- f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$ لكل x و y عنصرين مختلفين من I .

3 . تغيرات دالة تآلفية :

خاصية : لتكن الدالة التآلفية f بحيث : $f(x) = ax + b$ لكل x من IR .

- إذا كان $a \succ 0$ فإن f تزايدية قطعا على IR .

- إذا كان $a \prec 0$ فإن f تناقصية قطعا على IR .
- إذا كان $a = 0$ فإن f ثابتة على IR .

4 . الرتابة وزوجية دالة :

خاصية :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f متماثلا بالنسبة للصفر ، و I مجالا ضمن D_f و J مماثل I بالنسبة للصفر .

- إذا كانت f دالة فردية فإن :

f تزايدية على I (تزايدية قطعا على I) يكافئ : f تزايدية على J (تزايدية قطعا على J) .
f تناقصية على I (تناقصية قطعا على I) يكافئ : f تناقصية على J (تناقصية قطعا على J) .

- إذا كانت f دالة زوجية فإن :

f تزايدية على I (تزايدية قطعا على I) يكافئ : f تناقصية على J (تناقصية قطعا على J) .
f تناقصية على I (تناقصية قطعا على I) يكافئ : f تزايدية على J (تزايدية قطعا على J)

تمرين 6 :

I ـ لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1) بين أن الدالة f فردية .
2) ادرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;1]$ و $[1;+\infty[$.
3) استنتج تغيرات f على IR .

II ـ لتكن g الدالة العددية المعرفة بما يلي : $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$.

1) بين أن الدالة g زوجية .
2) ادرس رتابة الدالة g على كل من المجالين $[0;1]$ و $[1;+\infty[$.
3) استنتج تغيرات g على IR .

VI مركب دالتين :

1) نشاط تمهيدي :

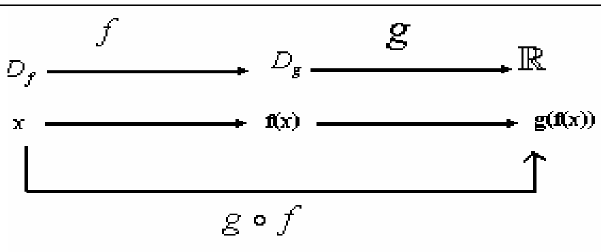
نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي : $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = -x+2$.

1 ـ احسب : $f(1)$ و $f(6)$ و $f\left(\dfrac{7}{4}\right)$ ثم احسب $g(f(3))$ و $g(f(6))$ و $g\left(f\left(\dfrac{7}{4}\right)\right)$.

2 ـ حدد مجالا I بحيث لكل x من I يمكن حساب $g(f(x))$ ثم حدد $g(f(x))$ لكل x من I .

2) تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين حيز تعريفهما D_f و D_g على التوالي . نضع $D = \{x \in IR / x \in D_f ; f(x) \in D_g\}$
الدالة h المعرفة على D بما يلي : $h(x) = g(f(x))$ ، تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب ونرمز لها بالرمز gof .



- $D_{gof} = \{x \in IR / x \in D_f ; f(x) \in D_g\}$
- $x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$

3) تطبيقات :

1. نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ و $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

حدد مجموعة تعريف الدالة gof .

2. لتكن f و h الدالتين المعرفتين بما يلي : $f(x)=2x-1$ و $h(x)=2x^2+3x+1$.
حدد دالة g بحيث : $h=gof$.
3. لتكن f و g الدالتين المعرفتين بما يلي : $f(x)=x^2+x$ و $g(x)=2x-1$.
حدد gof و fog ثم قارنهما .
ملاحظة : على العموم لدينا : $gof \neq fog$.

4) رتابة مركب دالتين :

خاصية :

لتكن f و g دالتين و I و J مجالين ضمن Df و Dg على التوالي بحيث $f(I) \subset J$
إذا كانت f على تزايدية على I و g تزايدية على J فان : gof تزايدية على I
إذا كانت f على تناقصية على I و g تناقصية على J فان : gof تزايدية على I
إذا كانت f على تزايدية على I و g تناقصية على J فان : gof تناقصية على I
إذا كانت f تناقصية على I و g تزايدية على J فان : gof تناقصية على I

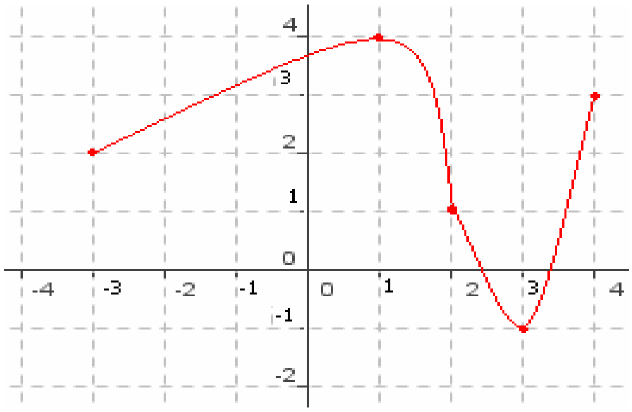
تطبيق :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x)=3x-1$ و $g(x)=x^2+1$
باستعمال تغيرات الدالتين f و g حدد تغيرات الدالتين fog و gof .

VII ـ صورة مجال بدالة عددية :

1) نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة المعرفة على المجال $[-3;4]$ تمثيلها المبياني هو الشكل التالي :



1) أ - بين أن : $\forall x \in [-3;2] :\ 1 \leq f(x) \leq 4$.
ب - ليكن $y \in [1;4]$ بين أن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا في المجال $[-3;2]$.
ج ـ استنتج أن : $f([-3;2])=[1;4]$
2) حدد مبيانيا صورة كل مجال من المجالات التالية : $[-3;1]$ و $[2;4]$ و $[1;3]$.

2) تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f و I مجالا ضمن D_f .
صورة المجال I بالدالة f هي المجموعة المكونة من جميع صور عناصر I ونرمز لها بالرمز $f(I)$.
$f(I)=\{f(x)/x \in I\}$.

ملاحظات :

1 - $y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I \ :\ y=f(x)$
2 - f دالة عددية حيز تعريفها D_f ؛ I و J مجالان من IR بحيث : $I \subset D_f$.
لدينا : $f(I) \subset J \Leftrightarrow \forall x \in I; f(x) \in J$.