عموميات حول الدوال العددية

القدرات المنتظرة

مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات *استنتاج تغيرات دالة او القيم القصوية والدنوية لدالة انطلاقا من تمثيليها المبياني او من جدول تغيراتها*التعرف على تغيرات الدوال من الشكل $f+\lambda$ و λf انطلاقا من تغيرات الدالة f * استعمال التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغيراتها لتحديد صورة مجال او لحل بعض المعادلات والمتراجحات *

I. تـــــــذكير وإضـــــافـــــات

نشـــــاط1

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x)=2x^2-3$

1.حدد صور الأعداد التالية 1- و 2 و $-\sqrt{5}$

2.حدد سوابق الأعداد الحقيقية الآتية إن وجدت5و0و4- بالدالة f

نشـــــاط2

حدد مجوعة تعريف الدوال التالية

$f(x)=\sqrt{x-1}$; $g(x)=3-\sqrt{2-x}$

$M(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-1}$; $k(x)=\dfrac{3x}{x^2-1}$

تعـــــريف1

مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي لها صورة بالدالة f ويرمز لها ب D_f

-إذا كانت $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$.لكي تكون f معرفة يجب أن يتحقق $g(x)\neq 0$. نقوم

بحل المعادلة $g(x)=0$ ومنه

$D_f = IR$ - { حلول المعادلة }

-إذا كانت $f(x)=\sqrt{g(x)}$.تكون f معرفة إذا وفقط إذ ا كان $g(x)\geq 0$

نشـــــــاط3

ادرس زوجية الدوال التالية

$f(x)=x^3+5x$ $\qquad f(x)=-x^3+2x|x|$ $\qquad f(x)=x^2-3|x|$

تعــــــــريف2

❖ f دالة زوجية إذا حققت الشرطين $;f(-x)=f(x)$ $\quad -x\in D_f$

❖ f دالة فردية إذا حققت الشرطين $x\in D_f\ ;f(-x)=-f(x)$

II – الرتـــــــــابة ومـــعـــدل التـــــغيـــرات

تعـــــريف

– f دالة رتيبة (تزايدية أو تناقصية) ← نحسب معدل التغيرات $T=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

إذا كان $T\succ 0$ فالدالة f تزايدية والعكس بالعكس

خصـــــــائـــــــص

- الـــــــدالة الزوجية تعكس الرتابة
- منحنى الدالة الزوجية متماثلا بالنسبة لمحور الاراتيب

❖ الدالة الفردية تحافظ على الرتابة

❖ منحنى الدالة الفردية متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

- لدراسة تغيرات الدالة نكتفي بالدراسة على المجال الموجب انطلاقا من الصفر
- التمثيل المبياني للدالة f هو المنحنى المكون من مجموعة النقط بحيث

$$C_f = \{M(X; f(x)) / x \in D_f\}$$

تمرين مدمج (نشاط3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|-1}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن f دالة زوجية
3. ادرس تغيرات الدالة f
4. أنشئ منحنى الدالة f
5. بين أن $f(x)\geq 0$ لكل من $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ و بين أن $f(x)\leq 0$ لكل من $]-1;1[$

III-الدالة المكـــــبورة ـ المصـــــغـورة ـ المـــحـــــدودة

تعـريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

* f دالة مكبورة إذا وجد عدد حقيقي a حيث $\forall x \in I, f(x)\leq a$
* f دالة مصغورة إذا وجد عدد حقيقي b بحيث $\forall x \in I; f(x)\geq b$
* f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة ومصغورة على I

***نشـــاط4**

لتكن f دالة بحيث $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

بين أن f مصغورة بالعدد 0 و مكبورة بالعدد $\dfrac{1}{2}$

*نشـــاط5

f دالة معرفة بما يلي $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

بين أن f مصغورة بالعدد 0 و مكبورة بالعدد 1 على D_f

*نشـــاط6

1- f دالة معرفة بمايلي $f(x)=\frac{1}{x^2+1}-1$ بين أن f محدودة بالعددين 2 و2- على D_f

2. لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ بين أن f مكبورة بالعدد 2 على المجال $[0;+\infty[$

3. بين أن الدالة المعرفة g بما يلي : $g(x)=\frac{3+\sin x}{1+x^2}$ محدودة على $\mathbb{R}$

IV-مطـــــــــاريـــــــف دالـــــــة

تعــريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي وليكن a عنصرا من $I\subset D_f$

- -نقول إن العدد $f(a)$ **قيمة قصوى** للدالة f عند النقطة a إذا كان $f(x)\le f(a)$ لكل x من I
- نقول إن العدد $f(a)$ **قيمة دنيا** للدالة f عند النقطة a إذا كان $f(x)\ge f(a)$ لكل x من I

لتكن f دالة معرفة على $[-4;7]$. وليكن جدول تغيراتها كما يلي

x	-4	-3	2	7
$f(x)$	↘	↗	↘	

حدد القيم القصوى والدنيا

V- مقـــــــارنة دالتين –التأويل الهندسي أو المبياني

دراسة مثال لتكن f و g دالتين عدديتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^2$

1. احسب $g(x)-f(x)$ 2. مادا تستنتج

الجواب لدينا

$$\begin{aligned} &g(x)-f(x)\\ &=x^2-2x+1\\ &=(x-1)^2\geq 0\end{aligned}$$

بما أن $g(x)-f(x)\geq 0$

ومنه $f(x)\leq g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$. ادن $f\leq g$ على $\mathbb{R}$

تعـــــريف

نعتبر f و g دالتين عدديتين معرفتين على نفس المجموعة D

نقول إن f اصغر من ا وتساوي g على D إذا كان $f(x)\leq g(x)$ لكل x من D ونكتب $f\leq g$ على D

التأويل الهندسي

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على نفس المجموعة D وليكن (C_f) و (C_g) منحنييهما في نفس المعلم .تكون $f\leq g$ على D إذا وفقط اذا كان (C_f)

VI - صـــــــــورة جزء من $\mathbb{R}$ بدالة عددية

f دالة عددية معرفة على D . مجموعة العناصر التي هي على شكل $f(x)$ تسمى **صورة المجموعة** D **بالدالة** f ويرمز لها بالرمز $f(D)$ حيث $f(D)=\{f(x)/x\in D\}$

VII- مـــــــــــــــركــــــــب دالـــــتيـــــــن

تعـــــريف

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي .الدالة h المعرفة بما يلي $h(x)=g\left(f(x)\right)$ تسمى مركب الدالة f والدالة g في هدا الترتيب ويرمز لها ب $g\circ f$ $\left(g.rond.f\right)$

$$\forall x\in I: g\circ f\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right) \qquad x\to f(x)\to g(x)$$

$$\begin{tikzcd}
D_f \arrow[r, "f"] & D_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(x) \arrow[r] & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

ملاحظة **(تحديد حيز تعريف مركب دالتين)**

$$D_{g\circ f}=\left\{x/g\circ f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{x/g\left(f\left(x\right)\right)\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{x/f\left(x\right)\in D_g\right\}$$
$$=\left\{x/x\in D_f \text{ و } f\left(x\right)\in D_g\right\}$$

VIII– رتابة مركب دالتين

تعريف

f معرفة على I و g معرفة على J حيث $f(I)\subset J$

- إذا كان f تزايدية على I و g تزايدية على J فان $g\circ f$ تزايدية على J
- إذا كان f تزايدية على I و g تناقصية على J فان $g\circ f$ تناقصية على I
- إذا كانت f تناقصية على I و g تناقصية على J فان $g\circ f$ تزايدية على I
- إذا كانت f تناقصية على I و g تزايدية على J فان $g\circ f$ تناقصية على I

IX- دراسة الدوال المرجعية

A- رتابة الدالة التالفية $f(x)=ax+b$

* إذا كان $a\succ 0$ فان f تزايدية على IR
* إذا كان $a\prec 0$ فان f تناقصية على IR
* إذا كان $a=0$ فان f ثابتة على IR
* التمثيل المبياني الموافق للدالة التالفية هو مستقيم

B – دراســــة الدالة $f(x)=ax^2$ $(a\neq 0)$

* نعلم أن $D_f = IR$ *و نعلم أن f دالة زوجية

* لدراسة رتابة الدالة f ندرس إشارة a وهناك حالتين :

- إذا كانت $a \succ 0$ فإن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$ وتناقصية قطعا على $]-\infty;0]$. وتمثيله المبياني شلجم مركزه أصل المعلم ومحور الاراتيب هو محور التماثل وتقعره موجه نحو الأعلى
- إذا كانت $a \prec 0$ فإن f تناقصية قطعا على $[0;+\infty[$ وتزايدية قطعا على $]-\infty;0]$
- وتمثيله المبياني شلجم مركزه أصل المعلم ومحور الاراتيب هو محور التماثل وتقعره موجه نحو الأسفل

C – دراسة الدالة الحدودية من الدرجة الثانية $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

* نعلم أن $D_f=\{x\in IR / ax^2+bx+c\in IR\}$ $D_f=IR$ نعلم أن

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

لتكن $f(x)=y$ اذن

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$y+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

نضع $X=x+\frac{b}{2a}$ و $Y=y+\frac{b^2-4ac}{4a}$

بعد التعويض نجد $Y=aX^2$. هذه المعادلة تسمى المعادلة الديكارتية للشلجم الذي مركزه هو $\Omega\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

* نعلم أن $D_f=\{x\in IR / ax^2+bx+c\in IR\}$ $D_f=IR$ نعلم أن

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

لتكن $f(x)=y$ اذن

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$y+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

نضع $X=x+\frac{b}{2a}$ و $Y=y+\frac{b^2-4ac}{4a}$

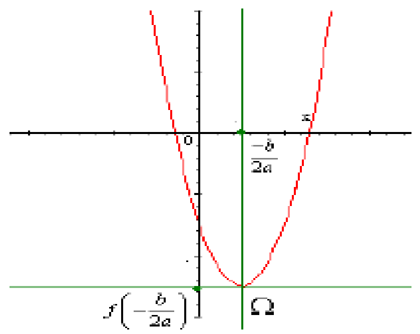
بعد التعويض نجد $Y=aX^2$. هذه المعادلة تسمى المعادلة الديكارتية للشلجم

الذي مركزه هو $\Omega\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

- لدراسة تغيرات الدالة f ندرس إشارة a وهناك حالتين :

– الحالة الأولى : إذا كانت $a\succ 0$ فان f تزايدية قطعا على $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right[$ وتناقصية قطعا على $\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$

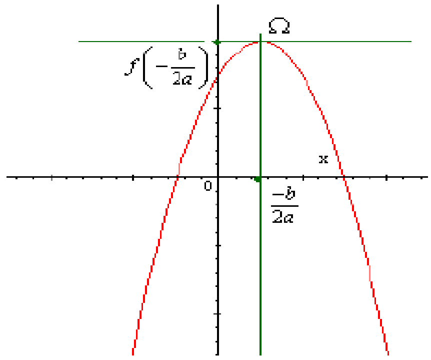
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗



- **الحالة الثانية:** إذا كانت $a \prec 0$ فإن f تناقصية قطعا على $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right[$

وتزايدية قطعا على $\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$

x	$+\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$-\infty$
f	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$



التمثيل المبياني الموافق للدالة هو شلجم مركزه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ ومعادلته الديكارتية $Y = aX^2$ ومحور تماثل المنحنى هو المستقيم دو المعادلة $x = -\frac{b}{2a}$

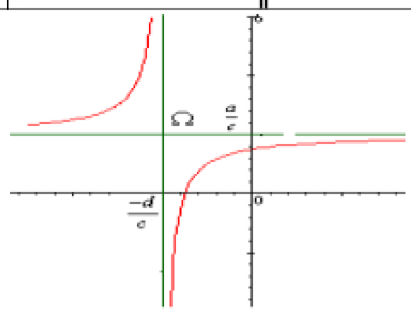
D – دراسة الدالة المتخاطة $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

* تحديد مجموعة التعريف $D_f = \{x \in IR / cx+d \neq 0\}$

* لدراسة التغيرات نحسب المحددة Δ بحيث $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad)-(cb)$

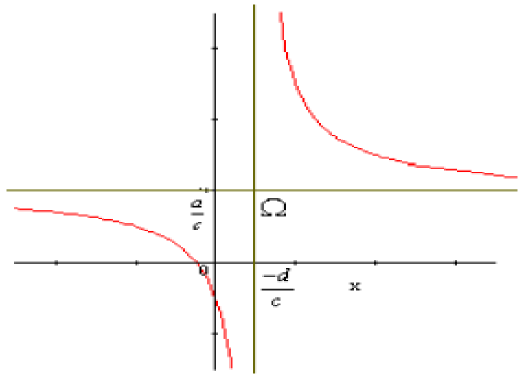
- إذا كان $\Delta \succ 0$ فإن الدالة f تزايدية على كل من المجالين $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ و $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$



- إذا كان $\Delta \prec 0$ فان الدالة f تناقصية على كل من المجالين $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ و $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$



(المعادلة الديكارتية للهذلول هي $Y=\frac{k}{X}$ مع k هو باقي القسمة للبسط على المقام)

ومركزه هو $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ ومقارباه $x=-\frac{d}{c}$ و $y=\frac{a}{c}$

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ $x=\alpha$ و $y=\beta$

ملاحظة: $\alpha=\frac{-d}{c}$ و $\beta=\frac{a}{c}$

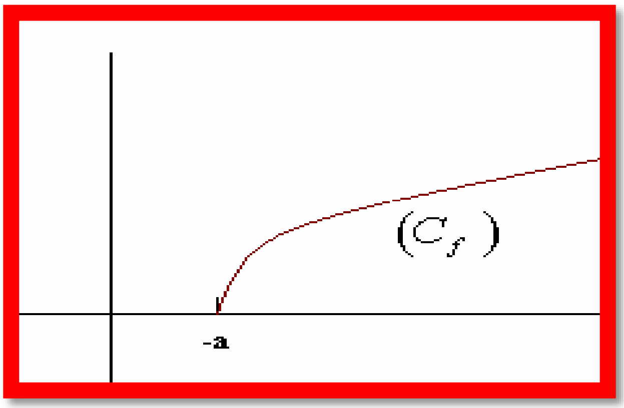
F - دراسة الدالة $f(x)=\sqrt{x+a}$ حيث a عدد حقيقي

- مجموعة تعريف الدالة f هي

$D=[-a;+\infty[$

- f تزايدية قطعا على $D=[-a;+\infty[$

x	$-a$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$



G - دراسة الدالة $g(x)=ax^3$

– مجموعة تعريف هده الدالة هي $\mathbb{R}$

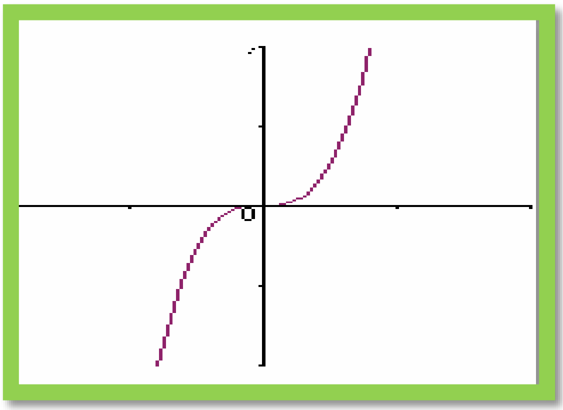
– الدالة فردية تمثيلها المبياني متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

– رتابة الدالة مرتبطة بإشارة العدد a

+ إذا كان $a \succ 0$ فان جدول تغيرات الدالة هو

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

التمثيل المبياني



+ إذا كان $a \prec 0$ فجدول تغيرات الدالة هو

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$

التمثيل المبياني