

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين رقم 1:. نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

- 1 - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- 2 - أدرس زوجية الدالة f على D_f .
- 3 - أدرس رتبة الدالة f على المجالين $[0,1]$ و $[1,+\infty[$.
- 4 - ضع جدول تغييرات الدالة f على D_f .
- 5 - حدد أطراف الدالة f في المجال $[-3,3]$.

الحل:

1 - $x \in D_f \Leftrightarrow x^2+1 \neq 0$ وبما أن لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $x^2+1 \neq 0$ إذن $D_f = \mathbb{R}$.

2 - ** لدينا: لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن لكل $-x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{2 \times (-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f(x)$$

ومنه الدالة f فردية على D_f .

3 - لدراسة الرتبة نستعمل معدل التغير:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2y}{y^2+1}}{x-y} = \frac{2x(y^2+1) - 2y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2xy^2 + 2x - 2yx^2 - 2y}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} = \frac{2xy^2 - 2yx^2 + 2x - 2y}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} \\ &= \frac{2xy(y-x) + 2(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} = \frac{(2xy-2)(y-x)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} \\ &= \frac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)} \end{aligned}$$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $[0,1]$.إذن $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ ومنه $0 < xy < 1$ إذن $0 < 2xy < 2$ وبالتالي $-2 < 2xy - 2 < 0$ إذن $0 < -(2xy - 2) < 2$ ومنه: $-(2xy - 2) > 0$ وبما أن $(x^2+1)(y^2+1) > 0$ فإن $\frac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)} > 0$ وبالتالي f تزايدية على المجال $[0,1]$ ** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $[1,+\infty[$.إذن $x > 1$ و $y > 1$ ومنه $xy > 1$ إذن $2xy > 2$ وبالتالي $2xy - 2 > 0$ إذن $-(2xy - 2) < 0$ ومنه: $-(2xy - 2) < 0$ وبما أن $(x^2+1)(y^2+1) > 0$ فإن $\frac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)} < 0$ وبالتالي f تناقصية على المجال $[1,+\infty[$ 4 - جدول تغييرات الدالة f ** أولاً نضع جدول تغييرات الدالة f على \mathbb{R}^+

x	0	1	$+\infty$
f(x)	0	1	

الدالة f تزايدية على المجال $[0,1]$ و تناقصية على المجال $[1,+\infty[$ و $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f(x)		-1	0	1	

- بما أن الدالة f تناقصية على المجال $[1, +\infty[$ و نعلم أن الدالة f فردية فإنها تناقصية على $]-\infty, -1]$.
و بما أن الدالة f تزايدية على المجال $[0, 1]$ و نعلم أن الدالة f فردية فإنها تزايدية على $[-1, 0]$.
5- نلاحظ إنطلاقا من جدول تغييرات الدالة f
أن لكل $x \in [-3, 3]$ أن $-1 \leq f(x) \leq 1$ إذن العدد 1 هو القيمة القصوى للدالة f و أن -1 هو القيمة الدنيا للدالة f .

تمرين رقم 2 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x) = \frac{-|x|}{x^2 - 1}$.
1- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2- أدرس زوجية الدالة f على D_f .
3- أدرس رتبة الدالة f على المجالين $[0, 1[$ و $]1, +\infty[$.
4- ضع جدول تغييرات الدالة f على D_f .

الحل :

- 1- $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0$ و $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ و $x \neq -1$.
إذن $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
2- ** لدينا : لكل $x \in D_f$ فإن لكل $-x \in D_f$.

$$** \text{ لدينا : } f(-x) = \frac{-|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{-|x|}{x^2 - 1} = \frac{-|x|}{x^2 - 1} = f(x)$$

ومنه الدالة f زوجية على D_f .

$$3- \text{ لدراسة الرتبة نستعمل معدل التغيير : } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\frac{-|x|}{x^2 - 1} - \frac{-|y|}{y^2 - 1}}{x - y} = \frac{-|x|(y^2 - 1) + |y|(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)}$$

$$= \frac{-|x|(y^2 - 1) + |y|(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)}$$

ليكن $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ لدينا

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-|x|(y^2 - 1) + |y|(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)} = \frac{-x(y^2 - 1) + y(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)}$$

$$= \frac{-xy^2 + x + yx^2 - y}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)} = \frac{yx^2 - xy^2 + x - y}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)} = \frac{xy(x - y) + x - y}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)}$$

$$= \frac{(x - y)(xy + 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)} = \frac{(xy + 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}$$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $[0, 1[$.

لدينا $0 \leq x < 1$ و $0 \leq y < 1$ ومنه $0 \leq xy < 1$ إذن $1 < xy + 1 < 2$

و بما ان $0 \leq x < 1$ فإن $0 \leq x^2 < 1$ ومنه $x^2 - 1 < 0$ وكذلك $y^2 - 1 < 0$ ومنه $\frac{(xy + 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $[0, 1[$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $]1, +\infty[$.

لدينا $x > 1$ و $y > 1$ ومنه $xy > 1$ إذن $xy + 1 > 2$.

بما أن $x > 1$ فإن $x^2 > 1$ ومنه $x^2 - 1 > 0$ وكذلك $y^2 - 1 > 0$ ومنه $\frac{(xy + 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]1, +\infty[$.

4 - جدول تغييرات الدالة f

** أولا نضع جدول تغييرات الدالة f على $[0, 1[\cup]1, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
f(x)	0		

الدالة f تزايدية على المجال $[0, 1[$ و تزايدية على المجال $]1, +\infty[$ و $f(0) = 0$.

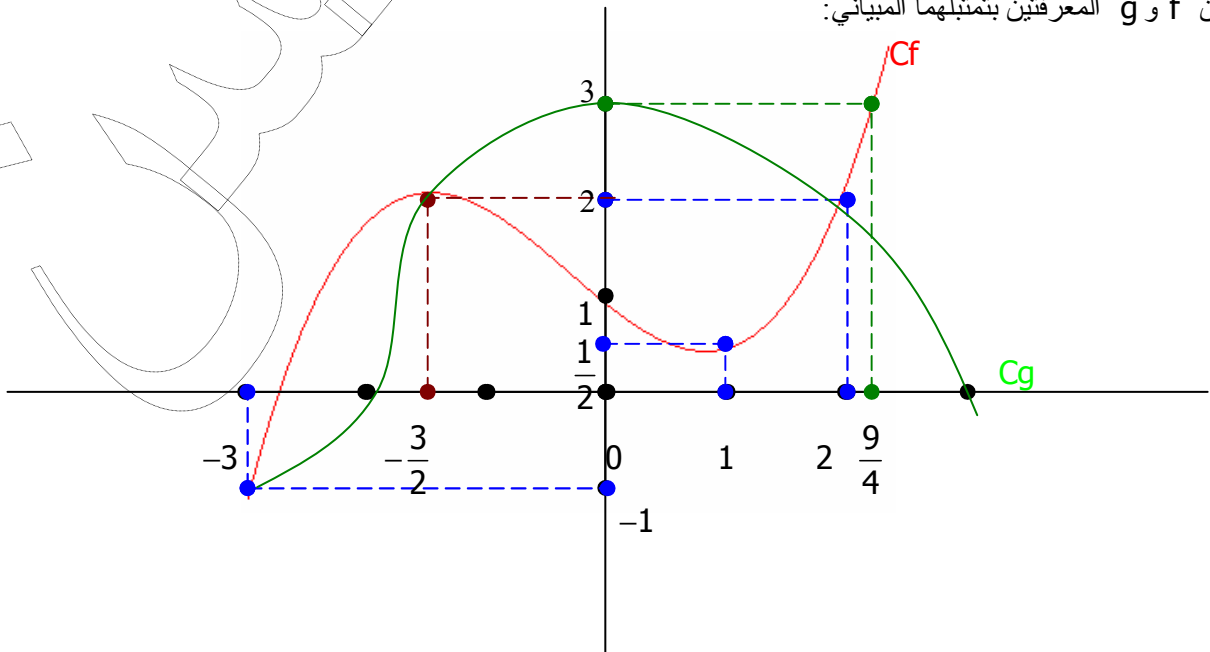
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f(x)			0		

بما أن الدالة f تزايدية على المجال $]1, +\infty[$ ونعلم أن الدالة f زوجية فإنها تناقصية على $]-\infty, -1[$.

و بما أن الدالة f تزايدية على المجال $[0, 1[$ ونعلم أن الدالة f زوجية فإنها تناقصية على $]-1, 0[$.

تمرين رقم 3 :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بتمثيلهما المبياني:



1 - حدد مبيانيا : $f\left(\frac{9}{4}\right)$ و $f(-3)$ و $f(1)$ و $g(0)$ و $g(-2)$

2 - حل مبيانيا المعادلة : $f(x) = 2$

3 - حل مبيانيا المتراجحة : $f(x) > 2$

4 - حل المعادلة : $f(x) = g(x)$

5 - حل المتراجحة : $f(x) < g(x)$

الحل :

1 - ** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $\left(\frac{9}{4}, 3\right)$ فإن : $f\left(\frac{9}{4}\right) = 3$

** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $(-3, -1)$ فإن : $f(-3) = -1$

** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ فإن : $f(1) = \frac{1}{2}$

** بما أن التمثيل المبياني للدالة g يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $(0, 3)$ فإن : $g(0) = 3$

** بما أن التمثيل المبياني للدالة g يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $(-2, 0)$ فإن : $g(-2) = 0$

2 - بما أن المستقيم الذي معادلته $y = 2$ (أفقي) يقطع التمثيل المبياني للدالة f في نقطتين إحداثياتهما $(2, 2)$ و $\left(\frac{-3}{2}, 2\right)$

فإن : $f(2) = 2$ و $f\left(\frac{-3}{2}\right) = 2$ وبالتالي : حل المعادلة هما العددان 2 و $\frac{-3}{2}$

3 - حل مبيانيا المتراجحة $f(x) > 2$ يعني تحديد المجالات التي يكون فيها التمثيل المبياني للدالة f فوق المستقيم الذي معادلته $y = 2$

و بما أن التمثيل المبياني ل f يوجد فوق المستقيم $y = 2$ في المجال $]2, +\infty[$ فإن حل المتراجحة هو المجال $]2, +\infty[$

4 - حل المعادلة $f(x) = g(x)$ هو تحديد نقط تقاطع التمثيلين المبيانيين للدالتين f و g

بما أن التمثيلين المبيانيين للدالتين f و g يتقاطعان في ثلاث نقط إحداثياتها هي : $(2, 2)$ و $\left(\frac{-3}{2}, 2\right)$ و $(-3, -1)$

فإن حل المعادلة $f(x) = g(x)$ هي الأعداد : 2 و $\frac{-3}{2}$ و -3

5 - حل المتراجحة $f(x) < g(x)$ هو البحث عن المجالات التي يكون فيها التمثيل المبياني للدالة f تحت التمثيل المبياني للدالة g

نلاحظ مبيانيا أن التمثيل المبياني للدالة f يوجد فوق التمثيل المبياني للدالة g في المجالين $\left[-3, \frac{-3}{2}\right]$ و $[2, 3]$

و يوجد تحته في المجال $\left[\frac{-3}{2}, 2\right]$

إذن حل المتراجحة $f(x) < g(x)$ هو المجال $\left[\frac{-3}{2}, 2\right]$

<http://riyadiyate.site.voila.fr>

تتمة التمارين في الأسابيع المقبلة