الدوال اللوغاريتمية

1. تعريف :

الدالة الأصلية للدالة : $x \to \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 1 تسمى الدالة اللوغارتمية النبيرية ويرمز لها بالرمز $\ln$ أو $\log$

$$\ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \succ 0 \\ (\ln(x))' = \frac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$$

2. خصائص:

مجموعة تعريف الدالة ln هي $]0;+\infty[$ ln(1)=0

الدالة ln متصلة على $]0;+\infty[$

الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in]0;+\infty[$

الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

لدينا : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{*}_{+}$

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(x) \succ \ln(y) \Leftrightarrow x \succ y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$r \in \mathbb{Q} \quad \ln(x)^r = r\ln(x)$$

ملاحظة

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln x \succ 0 \Leftrightarrow x \succ 1$$

$$\ln x \prec 0 \Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$$

لدينا الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ ومتصلة و $\ln(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$ و منه المعادلة $\ln x=1$ تقبل حلا

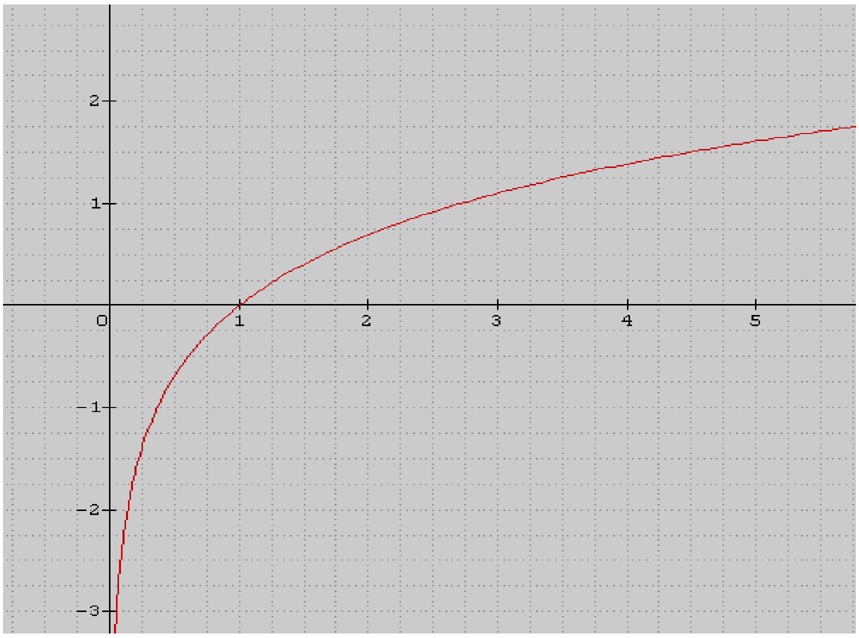
وحيدا في $]0;+\infty[$ ويرمز له بالحرف e اذن $\ln e=1$

نقبل أن e ليس عددا جذريا و قيمته المقربة هي $e\simeq 2,71828$

- ادن جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية

x	0	1	e	$+\infty$
f	$-\infty$	0	1	$+\infty$

- منحنى الدالة ln



www.bramaths.com Brahim Ajghaider

3. المشتقة :

f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث $f(x)\neq 0$:

$$\forall x\in I\quad [\ln(f(x))]'=\frac{f(x)'}{f(x)}$$

4 . النهايات :

الدالة $\ln$ دالة متصلة وتزايدية على $]0;+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad و \quad \lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty ; \lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$$

$$\lim_{+\infty}\ln(x)=+\infty \quad و \quad \lim_{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \quad و \quad \lim_{x\to +1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$$

5 . الدالة اللوغاريتمية للأساس a

✓ لكل $a\in\mathbb{R}^*_+-\{1\}$ الدالة $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ المعرفة على $]0;+\infty[$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ويرمز لها بالرمز $\log_a$

- إذا كان $a=e$ فان دالة اللوغاريتم للأساس e هي دالة اللوغاريتم النبيري.

$$\forall x\in]0;+\infty[\qquad Log_e(x)=\frac{\ln x}{\ln e}=\ln x$$

- إذا كان $a=10$ فان الدالة تسمى دالة اللوغاريتم العشري.

$$\forall x\in]0;+\infty[\qquad \log x=Log_{10}x=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

- جميع خصائص دالة اللوغاريتم النبيري تبقى صالحة لدالة اللوغاريتم للأساس a

$$\log_a(a)=1 \qquad ; \log_a(1)=0$$

$$\forall (x;y)\in (]0;+\infty[)^2 \qquad \forall r\in\mathbb{Q} \qquad Log_a(xy)=Log_a(x)+Log_a(y)$$

$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y) \quad ; \quad Log_a(x^r)=rLog_a(x)$$

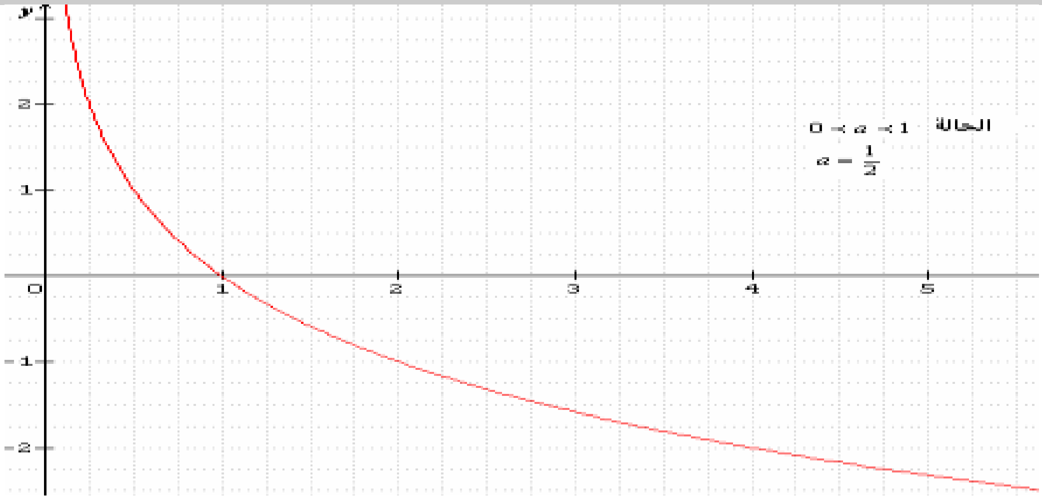
6. دراسة الدالة اللوغاريتمية للأساس a

لدينا $\forall x \in]0;+\infty[\quad Log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$

الحالة الأولى

اذا كان $0 \prec a \prec 1$ فان $\ln a \prec 0$ و منه $Log_a' \prec 0$ $\forall x \in]0;+\infty[$ اذن Log_a تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} Log_a x = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} Log_a x = -\infty$$



الحالة الثانية

اذا كان $a \succ 1$ فان $\ln a \succ 0$ و منه $Log_a' \succ 0$ $\forall x \in]0;+\infty[$ اذن Log_a تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} Log_a x = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} Log_a x = +\infty$$