

نهايات المتتاليات

A- تذكير

أنشطة تذكيرية

نشاط 1: نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad \begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة

3- أحسب $S'_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n .

نشاط 2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ مكبورة بالعدد 3

3- أدرس رتبة $(u_n)_{n \geq 1}$ و استنتج أن $(u_n)_{n \geq 1}$ مصغورة بالعدد 2

4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ $v_n = u_n - 3$

أ- بين أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n .

ب- أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n

1- المتتالية: المكبورة - المصغورة - المحدودة

* تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة إذا فقط إذا وجد

عدد حقيقي M بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_n \leq M$

* تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ مصغورة إذا فقط إذا وجد

عدد حقيقي m بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq m$

* تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ محدودة إذا فقط إذا كانت

$(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة و مصغورة

2- المتتالية الرتبية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية تزايدية

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية تزايدية قطعاً

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية تناقصية

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية تناقصية قطعاً

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية ثابتة

I- المتتالية الحسابية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ حسابية إذا كان يوجد عدد

حقيقي r بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$ العدد r يسمى أساس المتتالية .

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتالية لمتتالية

حسابية خاصة

إذا كان $(u_n)_{n \geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فإن

$$\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

ملاحظة - إذا كان $(u_n)_{n \geq p}$ متتالية حسابية أساسها r

فإن $\forall n \geq q \geq p \quad u_n = u_q + (n - q)r$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية

إذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$ فإن

$$S_n = \frac{(n - p)(u_p + u_{n-1})}{2}$$

$n - p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول

للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

$$S_n = \frac{(S_n \text{ عدد حدود})}{2} (S_n \text{ الحد الأول} + S_n \text{ الحد الأخير})$$

II- المتتالية الهندسية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هندسية إذا كان يوجد عدد

حقيقي q بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتالية لمتتالية

هندسية

خاصية

إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

ملاحظة - إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية

أساسها q فإن $\forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p q^{n-p}$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

إذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$ فإن

$$S_n = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p}}{1 - q} \right)$$

$n - p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول

للمجموع S_n

ملاحظة إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف

1 فإن S_n مجموع n حداً أولاً منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

حالة خاصة إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها

1 فإن $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} = u_p (n - p)$

نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عند $+\infty$
نكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ باختصار $\lim u_n$

نشاط نعتبر المتتاليتين (u_n) و $(v_n)_{n \geq 1}$ حيث $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2$ و $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{n} + 3$
نحدد $\lim u_n$ و $\lim v_n$

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ إذن $\lim u_n = +\infty$ نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$ إذن $\lim v_n = 3$

1- تعريف نهاية منتهية لمتتالية

نقول ان نهاية $(u_n)_{n \geq n_0}$ تؤول إلى l إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = l$

2- تعريف نهاية لا منتهية لمتتالية

* نقول ان نهاية $(u_n)_{n \geq n_0}$ تؤول إلى $+\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل $[A; +\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = +\infty$
* نقول ان نهاية $(u_n)_{n \geq n_0}$ تؤول إلى $-\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty; A]$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = -\infty$

ملاحظة $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim -u_n = +\infty$

3- نهايات متتالية مرجعية

خاصية

ليكن p عدد صحيح طبيعي $p \geq 1$ و k عدد حقيقي

$$\lim \frac{1}{n^p} = 0 \quad \lim \frac{k}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim n^p = +\infty \quad \lim \sqrt{n} = +\infty$$

4 خاصة

لتكن متتالية عددية $(u_n)_{n \geq n_0}$ و l عددا حقيقيا

$$\lim (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

$$\lim |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

5- متتالية متقاربة - متتالية متباعدة

تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها منتهية.
نقول إن متتالية متباعدة إذا و فقط كانت غير متقاربة.

أمثلة

$$w_n = (-1)^n \quad \text{و} \quad v_n = n^3 \quad \text{و} \quad u_n = \frac{-3}{n^2} + 4$$

(u_n) متقاربة لان $\lim u_n = 4$

(v_n) متباعدة لان $\lim v_n = +\infty$

(w_n) متباعدة لأن (w_n) لا تقبل نهاية

II- مصادق التقارب

مصادق 1 لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية و $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة

$$l \text{ عدد حقيقي حيث } \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| \leq v_n$$

إذا كان $\lim v_n = 0$ فإن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متقاربة و $\lim u_n = l$

مصادق 2 لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتاليتين عدديتين حيث $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n$

إذا كان $\lim u_n = +\infty$ فإن $\lim v_n = +\infty$

إذا كان $\lim v_n = -\infty$ فإن $\lim u_n = -\infty$

لازمة

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$ ثلاث متتاليات حيث $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad v_n \leq u_n \leq w_n$

إذا كان $\lim v_n = \lim w_n = l$ فإن $\lim u_n = l$

أمثلة نعتبر $(u_n)_{n \geq 1}$ حدد $\lim u_n$ في الحالات التالية:

أ- $u_n = n^2 + n - 3$ ب- $u_n = -n^2 + n$ ج- $u_n = \frac{\sin n}{n}$

أ- لدينا لكل $n \geq 3$ $n^2 \leq n^2 + n - 3$ و حيث $\lim n^2 = +\infty$ ومنه $\lim u_n = +\infty$

ب- لدينا لكل $n \geq 2$ $1 - \frac{n}{2} \leq 0$ ومنه $1 - n \leq -\frac{n}{2}$ و بالتالي $n - n^2 \leq -\frac{n^2}{2}$

وحيث $\lim -\frac{n^2}{2} = -\infty$ فإن $\lim u_n = -\infty$

ج- لدينا لكل $n \geq 1$ $\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ و حيث $\lim \frac{1}{n} = 0$ فإن $\lim u_n = 0$

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n \geq 1}$ حيث $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

بين بالترجع أن $u_n \geq \sqrt{n}$ و استنتج $\lim u_n$

III- نهاية المتتالية الهندسية q^n

الحالة 1: $q > 1$

يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً a حيث $q = 1 + a$ نعلم أن $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ومنه $q^n \geq 1 + na$

وحيث $\lim 1 + na = +\infty$ فإن $\lim q^n = +\infty$

الحالة 2: $q = 1$ لدينا $\lim q^n = 1$

الحالة 3: $-1 < q < 1$

$|q| < 1$ ومنه $\frac{1}{|q|} > 1$ ومنه $\lim \left(\frac{1}{|q|} \right)^n = +\infty$ و بالتالي $\lim |q^n| = 0$

إذن $\lim q^n = 0$

الحالة 4: $q \leq -1$ ليست لها نهاية

خاصية

إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim q^n = 0$
إذا كان $q \leq -1$ فإن (q^n) ليست لها نهاية

إذا كان $q > 1$ فإن $\lim q^n = +\infty$
إذا كان $q = 1$ فإن $\lim q^n = 1$

ملاحظة * المتتالية (q^n) متقاربة إذا كان $-1 < q \leq 1$

* ليكن $r \in \mathbb{Q}^*$

إذا كان $r < 0$ فإن $\lim_{+\infty} n^r = 0$

إذا كان $r > 0$ فإن $\lim_{+\infty} n^r = +\infty$

أمثلة حدد $\lim \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n$ و $\lim \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

تمرين نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب:

$$u_0 = \frac{3}{2} ; (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$$

$$(1) \text{ بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$$

$$(2) \text{ أدرس رتبة } (u_n) \text{ و استنتج أن } (u_n) \text{ متقاربة}$$

$$(3) \text{ أ- بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

ب - استنتج : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ثم أحسب $\lim u_n$

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{n+1} \end{cases} \text{ نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ حيث}$$

$$\text{بين أن } \forall n \geq 10 \quad 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2} \text{ ثم حدد } \lim u_n$$

IV- خاصيات

خاصية كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

خاصية إذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين نهايتها l و l' بحيث $u_n \leq v_n$ لكل $n \geq N$ فان $l \leq l'$

مبرهنة كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

ملاحظة كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة بـ $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$$1- \text{ بين أن } (u_n)_{n \geq 1} \text{ تزايدية}$$

$$2- \text{ بين أن } \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \text{ ثم بين أن } u_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$3- \text{ استنتج أن } (u_n)_{n \geq 1} \text{ متقاربة.}$$

V- العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

1- مبرهنة

(u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و α عدد حقيقي

$$\lim(\alpha u_n) = \alpha \lim u_n$$

$$\lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$$

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

إذا كان $\lim v_n \neq 0$ فان $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

العمليات على النهايات

$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\lim(u_n \times v_n)$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim v_n$	$\lim u_n$
$(l' \neq 0) \frac{l}{l'}$	$l \times l'$	$l + l'$	l'	l
0	∞ مع وضع إشارة l	$+\infty$	$+\infty$	$l \neq 0$ l
0	∞ مع وضع عكس إشارة l	$-\infty$	$-\infty$	$l \neq 0$ l
∞ مع وضع إشارة l	0	l	0^+	$l \neq 0$ حيث l
∞ مع وضع عكس إشارة l	0	l	0^-	$l \neq 0$ حيث l
شكل غير محدد	0	0	0	0
0	شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	0
0	شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l	$+\infty$	l حيث $l \neq 0$	$+\infty$
∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l	$-\infty$	l حيث $l \neq 0$	$-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3 + n - 1}}{\sqrt[3]{n^2 2n - 4}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

VI- متتاليات من نوع $f(u_n)$

1- خاصية

إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية متقاربة نهايتها l و f دالة متصلة في العدد الحقيقي l فان المتتالية $(v_n)_{n \geq n_0}$ المعرفة بـ $v_n = f(u_n)$ بحيث $n \geq n_0$ متقاربة و نهايتها $f(l)$

2- متتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

نشاط

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n} \end{cases}$$

نعتبر (u_n) متتالية عددية حيث

$$-1 \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq \frac{7}{2}$$

$$-2 \text{ لتكن } (v_n) \text{ متتالية عددية حيث } v_n = 1 - \frac{4}{u_n + 1}$$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب- ب- حدد $\lim v_n$ استنتج $\lim u_n$

$$-3 \text{ لتكن } f \text{ دالة عددية معرفة على } \mathbb{R}_+^* \text{ حيث } f(x) = \frac{2x+3}{x}$$

أ- تأكد أن f متصلة على $\left[2; \frac{7}{2}\right]$

ب- بين أن $f\left(\left[2; \frac{7}{2}\right]\right) \subset \left[2; \frac{7}{2}\right]$

ت- حل المعادلة $f(x) = x$

ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

خاصية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ بحيث يوجد مجال I ضمن D_f و الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ينتمي إلى I و f متصلة على I و $f(I) \subset I$.
إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فان نهايتها l هي حل للمعادلة $f(x) = x$

تمرين

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ

$$-1 \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 2$$

-2 بين أن (u_n) متتالية تزايدية و استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة .

-3 استنتج $\lim u_n$

تمرين

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$$

بين أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها