الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقنية ـ سيدي قاسم	الدوال اللوغاريتمية	المستوى : $2^{ème}$BAC
الأستاذ : محمد اليمني	Les fonctions logarithmes	STE+STM+SVT+PC
		عدد الساعات : 10 ساعة

التوجيهات الرسمية
ـ يتم تقديم دالة اللوغاريتم في بداية السنة الدراسية مباشرة بعد تقديم الدوال الأصلية (والتي يمكن تقديمها خلال درس الاشتقاق) كالدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$.
ـ يتم قبول النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
ـ تعتبر النهايات المرتبطة بالدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية النيبيرية بالإضافة إلى النهايات : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x$ ؛ حيث : $n \in IN^* - \{1\}$ نهايات أساسية .
ـ استعمال الدوال اللوغاريتمية و الأسية في حل مسائل متنوعة .

أهداف الدرس	
➢ التمكن من دالة اللوغاريتم النبيري . ➢ تعرف الخاصيات الجبرية لدالة اللوغاريتم النبيري ➢ التمكن من دراسة دالة اللوغاريتم النبيري ➢ تعرف النهايات اللوغاريتمية الأساسية . ➢ التمكن من معرفة المشتقة اللوغاريتمية لدالة ، ومشتقة الدالة : $x \mapsto \ln\|u(x)\|$	➢ التمكن من تحديد دالة أصلية للدالة : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ ➢ تعرف دالة اللوغاريتم للأساس a ➢ تعرف دالة اللوغاريتم العشري . ➢ توظيف دالة اللوغاريتم في مواد أخرى من مواد التخصص .

القدرات المنتظرة	
➢ التمكن من الحساب الجبري على اللوغاريتمات . ➢ التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمات لوغاريتمية . ➢ معرفة وتطبيق اللوغاريتم العشري (خاصة في حل المعادلات من نوع $10^x = a$)	➢ التمكن من النهايات اللوغاريتمية الأساسية وتوظيفها . ➢ التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي على لوغاريتمات .

الامتدادات	
➢ الحساب التكاملي ➢ الإحصاء والاحتمالات . ➢ الحسابيات .	➢ علوم الحياة والأرض ➢ العلوم الفيزيائية ➢ العلوم الاقتصادية

فقرات الدرس	
I ـ دالة اللوغاريتم النبيري : 1) تعريف 2) خاصيات (خاصيات جبرية) 3) دراسة وتمثيل الدالة ln . 4) نهايات اعتيادية	5) المشتقة اللوغاريتمية لدالة **II ـ دالة اللوغاريتم للأساس a .** 1) تعريف ؛ خاصيات 2) دالة اللوغاريتم العشري 3) دراسة وتمثيل الدالة $\log_a$

I ـ دالة اللوغاريتم النبيري :

Fonction Logarithme népérienne :

1) تعريف :

نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I . وبما أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$ فإنها تقبل دوال أصلية على المجال $]0;+\infty[$.

تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 ، تسمى دالة اللوغاريتم النبيري ونرمز لها بالرمز : $\ln$

$$\ln :]0,+\infty[\to IR$$
$$x \mapsto \ln x$$

ولدينا : $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$; $(\forall x \in]0+\infty[)$ و $\ln 1 = 0$

نتائج :

- مجموعة تعريف الدالة $\ln$ هي $]0;+\infty[$
- $\ln 1 = 0$
- الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $(\ln x)' = \frac{1}{x} \succ 0$; $\forall x \in]0;+\infty[$.
- الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

  لكل a و b من $]0;+\infty[$ لدينا : $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

  و $a \prec b \Leftrightarrow \ln a \prec \ln b$
- إشارة $\ln x$: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

  $\ln x \succ 0 \Leftrightarrow x \succ 1$

  $\ln x \prec 0 \Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$

تطبيقات :

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln(x+1) + \ln(5-x)$

2) حل في IR المعادلة : $\ln(x^2 + 2x) = \ln(7x+6)$

3) حل في IR المتراجحة : $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

2) خاصيات جبرية :

لكل a و b من $]0,+\infty[$ لدينا :

❖ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. (الخاصية الأساسية)	❖ $\ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + .. + \ln a_n$
❖ $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.	❖ $\ln a^r = r \ln a$ $(r \in Q)$
❖ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.	❖ $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
	❖ $\ln\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}\ln a$

ملاحظة :

- إذا كان $xy \succ 0$ فإن : $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$ و $\ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln|x| - \ln|y|$
- إذا كان $x \in IR^*$ فإن : $\ln(x^2) = 2\ln|x|$.

تطبيقات :

1) بسط العددين : $A = \ln 2 + \ln(2+\sqrt{2}) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

$B = \ln(a^2 - 1) + \ln(b^2 - 1) - \ln((ab+1)^2 - (a+b)^2)$ (حيث : $a \succ 1$ و $b \succ 1$)

3) دراسة الدالة $\ln$:

❖ حسب تعريف الدالة $\ln$ فإنها دالة معرفة ومتصلة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة موجبة قطعا على $]0;+\infty[$. وبالتالي فإن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

❖ **نهايات الدالة عند محدات مجموعة التعريف :**

نقبل النهايتين : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad ؛ \quad \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty}$

❖ **جدول تغيرات الدالة $\ln$:**

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$(\ln)'(x)$	$+$
$\ln(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

نتائج :

من جدول تغيرات الدالة $\ln$ نستنتج :

ـ صورة المجال $]0;+\infty[$ بالدالة $\ln$ هي IR أي : $\ln(]0;+\infty[)=IR$

ـ المعادلة $\ln x=1$ تقبل حل وحيد في $]0;+\infty[$ نرمز لهذا الحل بالرمز e (قيمة مقربة لهذا العدد هي $e\approx 2{,}718$).

ـ لكل عدد جذري r لدينا : $\ln(e^r)=r$

❖ **الفروع اللانهائية :**

ـ بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\ln x=-\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب لمنحنى الدالة $\ln$.

ـ يمكن أن نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. إذن : منحنى الدالة $\ln$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

❖ **دراسة تقعر منحنى الدالة $\ln$:**

بما أن : $(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}\ ;\ \forall x\in]0;+\infty[$ فإن $(\ln)''(x)=-\dfrac{1}{x^2}\prec 0\ ;\ \forall x\in]0;+\infty[$.

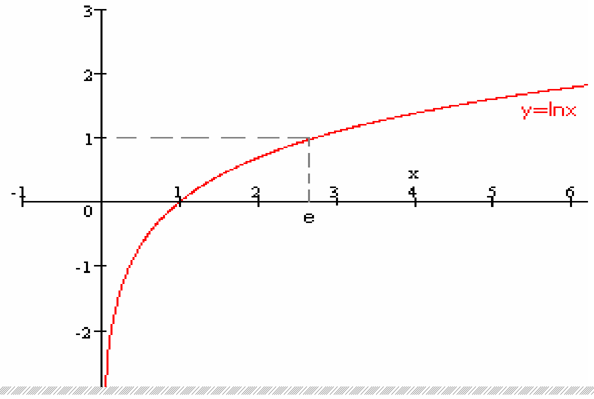
إذن : منحنى الدالة $\ln$ مقعر .

❖ **معادلة المماس :**

ـ معادلة المماس في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y=x-1$

ـ معادلة المماس في النقطة التي أفصولها e هي : $y=\dfrac{1}{e}x$

❖ **منحنى الدالة $\ln$:**



4) نهايات هامة :

نقبل النهايات التالية :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1 \quad ؛ \quad \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \quad ؛ \quad \lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}} x\ln x=0^- \quad ؛ \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$n\in IN^*-\{1\} : \text{حيث} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad ؛ \quad n\in IN^*-\{1\} : \text{حيث} \quad \lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}} x^n\ln x=0^-$$

تطبيقات :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to0^-} x\ln(x^2-x) \quad ؛ \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x-(\ln x)^2\right) \quad ؛ \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad ؛ \quad \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$$

5) المشتقة اللوغاريتمية لدالة :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على I ($\forall x\in I \; ; \; \mathrm{u}(x)\neq 0$)

ونعتبر الدالة f المعرفة على I بما يلي : $f: x\mapsto \ln|u(x)|$

بما أن u قابلة للاشتقاق على I فإنها متصلة على I ولدينا u ولا تنعدم على I إذن إما أن تكون موجبة قطعا أو سالبة قطعا على I .

– إذا كانت $u\succ0$ على I فإن $u(I)\subset]0;+\infty[$ ؛ ولدينا : $f(x)=\ln(u(x))$

وبما أن $\ln$ قابلة للاشتقاق على $u(I)$.

إذن : $f=\ln ou$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $f'(x)=(\ln ou)'(x)=\left((\ln)'(u(x))\right)\times u'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)} \quad ; \quad \forall x\in I$

– إذا كانت $u\prec0$ فإن $-u\succ0$ إذن : $-u(I)\subset]0;+\infty[$ ؛ ولدينا : $f(x)=\ln(-u(x))$.

وبما أن $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[\,\supset -u(I)$.

إذن : $f=\ln o(-u)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$$\forall x\in I \quad ; \quad f'(x)=(\ln o(-u))'(x)=\left((\ln)'(-u(x))\right)\times(-u'(x))=\frac{-u'(x)}{-u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

مبرهنة :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على I ؛ فإن الدالة $f: x\mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على المجال I ودالتها المشتقة هي $\forall x\in I \; : \; f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

تعريف :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على I

الدالة : $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I .

مثال :

نعتبر الدالة u المعرفة على IR بما يلي : $u(x)=x^2+x+2$

– الدالة u قابلة للاشتقاق على IR ولا تنعدم على IR ولدينا : $u'(x)=2x+1 \quad ; \quad \forall x\in IR$

إذن : المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على IR هي الدالة : $x\mapsto\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}$

نتيجة :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على I .

الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال : $x\mapsto\ln|u(x)|+k$ حيث $k\in IR$.

أمثلة :

1) الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ على IR هي الدوال : $x \mapsto \ln|x^2+1| + k$ حيث $k \in IR$.

2) الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \tan x$ على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هي الدوال : $x \mapsto \ln|\cos x| + k$ حيث $k \in IR$.

3) الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على $]0;+\infty[$ هي الدوال : $x \mapsto \ln|\ln x| + k$ حيث $k \in IR$.

4) الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]-\infty;0[$ هي الدوال : $x \mapsto \ln(-x) + k$ حيث $k \in IR$.

تمرين : احسب الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{(1+x^2)^2}$.

II – الدالة اللوغاريتمية للأساس a :

1) تعريف وخاصيات :

تعريف :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا ومخالفا للعدد 1 .

الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز : $\log_a$

$$\log_a :]0,+\infty[\to IR$$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

نتائج :

$\log_a 1 = 0$ ؛ $\log_a e = \frac{1}{a}$ ؛ $\log_a(a) = 1$

$\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ \log_e(x) = \ln x$ إذن : $\ln = \log_e$

(دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e)

خاصيات جبرية :

لكل x و y من $]0,+\infty[$ ولكل a من $]0;+\infty[-\{1\}$ لدينا :

❖ $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.	❖ $\log_a(x_1 \times x_2 \times ... \times x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + .. + \log_a(x_n)$
❖ $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$.	❖ $\log_a x^r = r\log_a x$ ($r \in Q$)
❖ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.	❖ $\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_a(x)$
	❖ $\log_a(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\log_a(x)$

2) دالة اللوغاريتم العشري :

تعريف :

دالة اللوغاريتم العشري هي الدالة اللوغاريتمية للأساس 10 وتكتب $\log$ بدلا من $\log_{10}$.

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

نتائج : $\log(10) = 1$ ؛ $\log 1 = 0$ ؛ $\log 10^r = r$ ($r \in Q$) .

تمرين : 1) احسب : $\log_{e^3} e$ ؛ $\log_2 4$ ؛ $\log_2 \frac{1}{2}$ ؛ $\log_9 3$ ؛ $\log_{\frac{1}{3}} 9$ ؛ $\log\frac{2}{5} - \log\frac{5}{7}$

2) احسب : $3\log_{100} 10 - \log_{100} 1{,}25 + 2\log_{100} 5 - \log_{100} 2$

3) بسط : $2\log_3(3-x) + \log_3(3+x) - \log_3(9-x^2)$; $x \in]-3;3[$

3) دراسة وتمثيل الدالة $\log_a$:

❖ **النهايات عند محدات حيز التعريف :**

– إذا كان $a \succ 1$ فإن $\ln a \succ 0$ وبالتالي فإن : $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = +\infty$ و $\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = -\infty$

– إذا كان $0 \prec a \prec 1$ فإن $\ln a \prec 0$ وبالتالي فإن : $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = -\infty$ و $\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = +\infty$

❖ الدالة $\log_a$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; (\log_a)'(x) = \frac{1}{x\ln a}$

إشارة مشتقة الدالة $\log_a$ مرتبطة بإشارة $\ln a$

– إذا كان $a \succ 1$ فإن $\ln a \succ 0$ وبالتالي فإن $\log_a$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

– إذا كان $0 \prec a \prec 1$ فإن $\ln a \prec 0$ وبالتالي فإن $\log_a$ تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$.

❖ **جدول تغيرات الدالة $\log_a$:**

إذا كان $a \succ 1$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$(\log_a)'(x)$	$+$
$\log_a(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

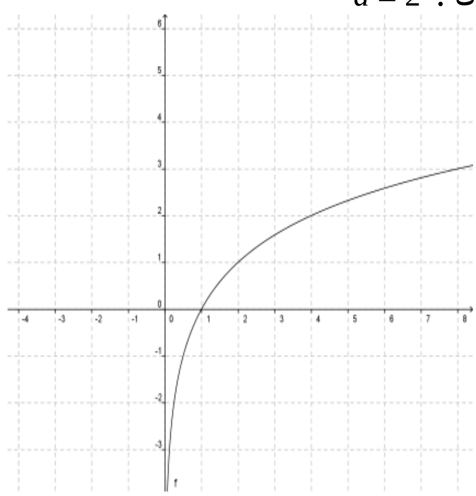
إذا كان $0 \prec a \prec 1$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$(\log_a)'(x)$	$-$
$\log_a(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

❖ **التمثيل المبياني للدالة $\log_a$:**

إذا كان $a \succ 1$

مثال : $a = 2$



إذا كان $0 \prec a \prec 1$

مثال : $a = \frac{1}{2}$