مقــدمـــة

في إطار تفعيل الميثاق الوطني للتربية و التكوين, و بغية الرفع من مستوى الفهم و التحليل, قام أساتذة ثانوية مولاي يوسف التقنية بطنجة لمادة الرياضيات تحت إشراف الأستاذ عبد اللطيف العمراني, بإنجاز هذين الدرسين. الأول موضوعه الدوال اللوغاريتمية و الثاني محوره الدوال الأسية.

فضلا عن ذلك, تمت تهيئة ملخص للدرسين, تبعته مجموعة من التمارين أدرجت من السهل إلى الأقل سهولة, وكان الهدف من ذلك تمكين المتلقي من استيعاب مختلف مراحل الدرسين, و الوقوف على أطوار و مراحل التفكير الرياضي.

نتمنى أن يجد التلميذ و الأستاذ بدوره الفائدة المرجو توفرها في مثل هذه البحوث المتواضعة.

السنة الدراسية: 2003 -2004

الدوال اللوغاريتمية و الدوال الأسية

1) الدوال اللوغاريتمية:

1 ـ الدالة اللوغاريتمية النبيرية:

أ ـ تعريف:

الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ متصلة على IR^{*+}

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على IR^{*+} والـــتي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري ونرمز لها بالرمز :

ln أو Log

$$\ln :]0,+\infty[\to IR$$
$$x \mapsto \ln x$$

$D_{\ln} =]0,+\infty[$, $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln' x = \frac{1}{x}$ و $\ln 1 = 0$

ب ـ نتائج وخاصيات:

الدالة ln متصلة تزايدية قطعا على IR^{*+}

لكل x و y من المجال $]0,+\infty[$.

$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$\ln(x) < \ln(x) \Leftrightarrow x < y$

$\ln(x) = \ln(x) \Leftrightarrow x = y$

$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^r) = r\ln(x) \quad ,(r \in Q)$

ln دالة متصلة وتزايدية قطعا على IR^{*+} إذن تقابل من IR^{*+} إلى IR $\ln(IR^{*+}) = IR$

$\exists!\, e \in IR^{*+} \; ; \ln(e) = 1$

$e \approx 2,7182 \; ; (e \notin Q)$

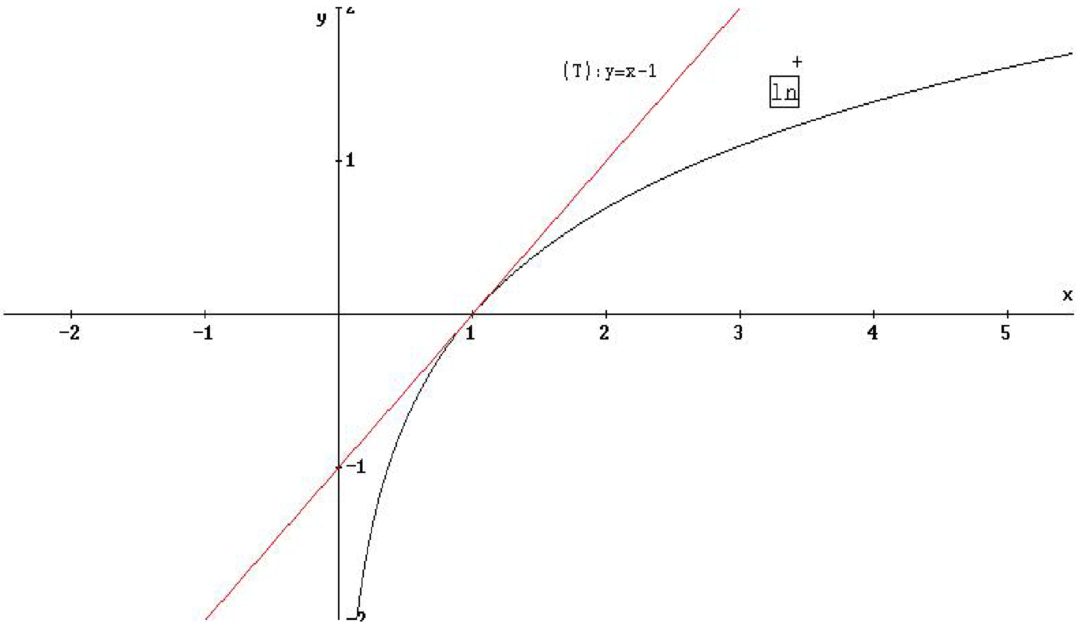
* تبقى النتائج والخاصيات صالحة إذا عوضنا x أو y أو هما معا بتعابير موجبة قطعا .

$$\ln u : E \to IR$$
$$x \mapsto \ln u(x)$$

$$x \in D_{\ln u} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in E \\ x \in D_u \\ u(x) > 0 \end{cases}$$

ج ــ التمثيل المبياني ونتائج دراسة الدالة **ln** .

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$



$(C_{\ln})$ مقعر $\Leftrightarrow$ $\ln x \leq x-1 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

النهايات الهامة:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \; ; \; \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^- \; ; \; \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

نتائج:

$u : x \quad u(x)$ دالة عددية موجبة قطعا ومعرفة بجوار x_0 .

ــ إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} \ln(u(x)) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln(u(x))}{u(x)} = 0$

ــ إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0^+$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} \ln\left(u(x)\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0} u(x).\ln\left(u(x)\right) = 0^-$

ــ إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln\left(u(x)\right)}{u(x)-1} = 1$

ــ إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} \ln\left(u(x)\right) = +\infty$

2 ـ المشتقة اللوغاريتمية

خاصية:

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و غير منعدمة على I .
الدالة : $g : x \to \ln\left\|u(x)\right\|$ قابلة للاشتقاق على I و لنا : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \qquad \forall x \in I$

* نستنتج أن: $u'(x) = g'(x)u(x) \quad \forall x \in I$

3 ـــ دالة اللوغاريتم للأساس a $\quad$ $a \in IR^{*+}-\{1\}$

تعريف:

الدالة : $x \quad \dfrac{\ln x}{\ln a}$ مع $x \in IR^{*+}$, تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز $\log_a$

* إذا كان $a = 10$ فإن $\log_a$ تسمى دالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها بالرمز log.

تمارين تطبيقية:

1) حدد مجموعة تعريف الدوال العددية للمتغير الحقيقي x التالية:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad g(x) = \ln(x^2-1) \quad , \quad h(x) = \ln(x-1) + \ln x$$

2) حل في IR:

$$\ln(x-1) = \ln(2-x) \quad , \quad \ln(x^2-x) \quad 0$$

3) احسب النهايات التالية:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\ \ 0}} \sqrt{x}\ln x \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x^r \ln x \quad (r \in IQ^*) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

4) احسب مشتقة الدوال التالية:

$$f(x)=\ln\left|x^2-4\right| \qquad \left(|x|\neq 2\right) \qquad\qquad g(x)=\ln\left((x^2-2x+1)^7\right) \qquad (x\neq 1)$$

$$h(x)=\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)(x-1)^3}{\left(x^2+4\right)^2} \qquad (x\in IR)$$

2) الدوال الأسية:

1 ـ الدوال الأسية النبيرية:

أ- تعريف:

الدالة $\ln x$ x تقابل من $]0,+\infty[$ نحو IR و تقابله العكسي يسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها بـــ: exp

$$\exp : IR \to]0;+\infty[$$
$$x \qquad \exp(x)$$
$$\left(\forall x\in \quad\right)\ \left(\forall y\in]0,+\infty[\right) : x=\ln y \Leftrightarrow y=\exp(x)$$

ب- نتائج و خاصيات:

ـــ الدالة exp متصلة و تزايدية قطعا على IR.

ـــ لكل x و y منIR:

$$\exp(x) \quad 0$$

$$\exp(0)=1$$

$$\exp(x)=\exp(y)\Leftrightarrow x=y$$

$$\exp(x) \quad \exp(y)\Leftrightarrow x \quad y$$

$$\ln(\exp(x)) = x$$

$$\exp(x) = e^x \ ,\ \exp(\ln|x|) = |x| \quad x\neq 0$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \ ,\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \ ,\ (e^x)^r = e^{xr}\ (r\in Q)$$

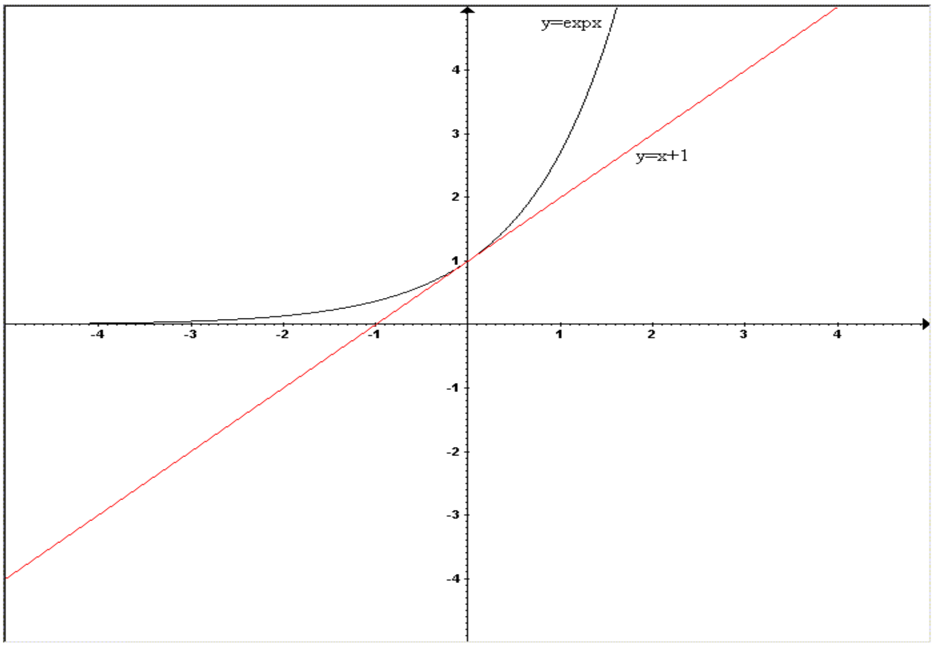
* تبقى النتائج و الخاصيات السابقة صالحة إذا عوضنا x أو y أو هما معا بتعابير.

$$\begin{aligned} \exp : E &\to IR \\ x \quad &(\exp\ u)(x) \end{aligned}$$

$$x \in D_{\exp\ u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in D_u \\ x \in E \end{cases}$$

التمثيل المبياني :

المستوى P منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$



$\left(C_{\exp}\right)$ محدب $\Leftrightarrow$ $e^x \geq x+1$ $\quad (\forall x \in IR)$

النهايات الهامة :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

نتائج :

$u:\ x \to u(x)$ دالة عددية معرفة بجوار x_0.

أ - $\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to x_0} e^{u(x)} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to x_0} \frac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty$$

ب - $\lim_{x\to x_0} u(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to x_0} e^{u(x)} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to x_0} u(x)e^{u(x)} = 0$$

ج - $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^{u(x)}-1}{u(x)} = 1$$

خاصية :

أ - الدالة $x \quad e^x$ قابلة للاشتقاق على IR و لدينا : $\left(e^x\right)' = e^x \quad (\forall x \in IR)$

ب - إذا كانت دالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \quad e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و

لدينا : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)} \quad (\forall x \in I)$

تمارين تطبيقية :

حل في IR ما يلي :

- $e^x - 21e^{-x} + 4 = 0$
- $\left(e^x + e^{-x}\right)^3 + \left(e^x - e^{-x}\right)^3 = 7e^x$
- $3e^x - 2e^{-x} + 1 \le 0$
- $-1 \quad \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \quad 1$

احسب النهايات التالية :

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 3}{e^x + 4}$ ، $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x^2}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

2 – الدالة الأسية التي أساسها a : $\left(a \in IR_+^* - \{1\}\right)$

تعريف:

الدالة $\log_a$ تقابل من $]0,+\infty[$ نحو IR

التقابل العكسي للتقابل $\log_a$ يسمى الدالة الأسية ذات الأساس a و نرمز له بـــــ : $\exp_a$

و لدينا :

$$(\forall x \in IR) \quad ; \left(\forall y \in IR_+^* - \{1\}\right) \qquad : \qquad y = \exp_a x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

خاصية : $\left(a \in IR_+^* - \{1\}\right)$

$$(\forall x \in IR) \quad \exp_a x = e^{x\ln a}$$
$$(\forall x \in IR) \quad a^x = e^{x\ln a}$$
نضع : $1^x = 1$

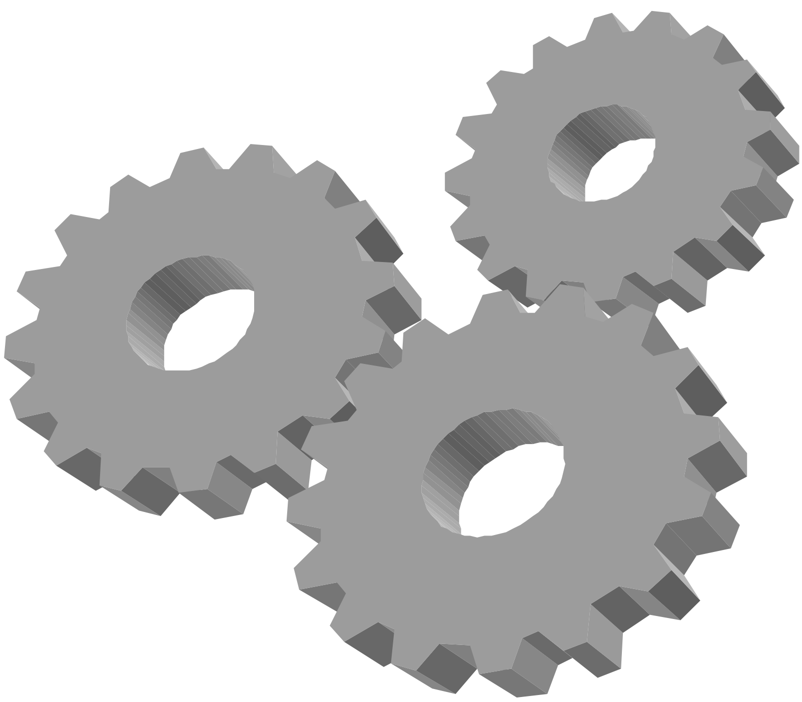
$u:\ x \to u(x)$ موجبة قطعا و معرفة على I

$v:\ x \to v(x)$ معرفة على J

$$\forall x \in I \cap J \qquad (u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

تمارين تطبيقية :

- حل في IR ما يلي : $3^x = 9^{x+1}$; $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$
- حدد مجموعة تعريف الدالة : $f(x) = (x^2 - 4x + 5)^x$ $(x \in IR)$
- احسب : $\lim_{x \to 0^-}\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2x}$; $\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\sqrt{x}}$



التمارين

تمرين 1:

أثبت العلاقات التالية ثم احسب النهايات التالية:

.1 $\forall x \in]2,+\infty[-\{3\} : \dfrac{\ln(x-2)}{x-3} = \dfrac{\ln(1+(x-3))}{x-3}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$

.2 $: \forall x \in]1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}[-\{0\} : \dfrac{\ln(1+2x-x^2)}{x} = (2-x)\dfrac{\ln(1+(2x-x^2))}{2x-x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-x^2)}{x}$

.3 $: \forall x \in]1,+\infty[: (x-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = -\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{-\dfrac{1}{x}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

.4 $: \forall x \quad -\dfrac{1}{p};(p \quad 0) : \dfrac{\ln(1+px)}{x} = p\dfrac{\ln(1+px)}{px}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+.......\ln(1+px)}{x}$

.5 $: \forall x \quad 0 : \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} = \left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\ln\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

.6 $x \quad e \quad \dfrac{x}{1-\ln x} = \dfrac{1}{x-\dfrac{\ln x}{x}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-\ln x}$

.7 $x \quad 0; \ \sqrt[3]{x}(\ln x)^2 = \left(6\sqrt[6]{x}\ln\sqrt[6]{x}\right)^2$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}(\ln x)^2$

.8 $: x \quad 1; \ (x-1)\ln\sqrt{x^2-x} = (x-1)\ln\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}(x-1)\ln(x-1)$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln\sqrt{x^2-x}$

.9 $(x \quad 1) \ ; \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x-1)-\ln x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x-1)-\ln x)$

.10 $\quad (x-2)e^{\frac{x-1}{x-2}} = (x-1)\left(\frac{e^{\frac{x-1}{x-2}}}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}\right) \quad ;(x \neq 2, x \neq 1) \quad \lim\limits_{x\to 2}(x-2)e^{\frac{x-1}{x-2}}$

.11 $\quad x^2\left(e^{\frac{1}{x-2}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = \left(\frac{2x^2}{x^2-2x}\right)e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{e^{\frac{2}{x(x-2)}}-1}{\frac{2}{x(x-2)}}\right) \quad ;(x \neq 2, x \neq 0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x-2}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$

.12 $\quad \frac{x^7}{e^x} = 7^7\left(\frac{\frac{x}{7}}{e^{\frac{x}{7}}}\right)^7 \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^7}{e^x}$

.13 $\quad \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{e^{2x}}{2x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \quad 0) \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}\right)$

.14 $\quad \frac{\sqrt{n}}{2^n} = e^{n\left(\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right)} \quad (n \in IN) \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$

تمرين2 :

حل في IR المعادلات و المتراجحات التالية :

$5^{3^x} = 3^{5^x}$

$e^{x-2} = 2$

$e^{\frac{x^2}{2}-1} = e^x$

$\ln\left(\frac{x^4-4}{3}\right) = 2\ln|x|$

$\log_3(x+11) = \frac{1}{2} + \log_9(4x+59)$

$2\ln 2 + \ln(x^2+x) = \ln(3+4x)$

$e^x - 2e^{-x} - 1 \quad 0$

$\log_2(x) \leq \log_{16}(4x^2-3)$

$(a \quad 0; a \neq 1) \quad \log_a(x) \quad \log_{a^2}(2x+3)$

$\ln\left(\frac{|x-1|}{|x|}\right) \quad 0$

تمرين 3:

حل في IR^2 النظمة التالية: $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = 2x \end{cases}$

تمرين 4:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $u_n = \log_2(n)$

1. بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية
2. هل $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة؟
3. أحسب المجموع : $u_1 + u_2 + ...+ u_n$

تمرين5:

لكل x من IR^+ نضع : $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ و $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3}$

1.

أ- بين أ ن الدالة f تزايدية قطعا على IR^+ وأن الدالة g تناقصية قطعا على IR^+

ب- بين أن $0 \quad \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \leq \dfrac{x^3}{3}$ لكل x من IR^+

2. احسب النهايتين :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

3. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $u_n = n^2 \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - n \quad \forall n \in IN^*$

أ- بين أن : $\forall n \in IN^* \quad u_n = n^2 f\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2}$

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ مصغورة بالعدد $-\dfrac{1}{2}$.

ت- أثبت أن : $u_n \leq \dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{2} \quad \forall n \in IN^*$ ثم أحسب $\lim u_n$.

تمرين6:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln\left|e^x - 1\right|$ لكل x من IR^*.

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(o;i;j)$.

1.

أ- تحقق أن f معرفة على IR^*.

ب- أحسب نهايات f عند محدات IR^*.

2.

أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من IR^* ثم ضع جدول تغيرات f على IR^*.

ب- بين أن المستقيم $(D): y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) جوار $+\infty$ ثم أدرس وضع (C) بالنسبة للمقارب المائل (D).

3. ليكن g قصور f على المجال $]0;+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من $]0;+\infty[$ نحو IR .

ب- لكل x من IR أحسب $g^{-1}(x)$.

4. نضع (Γ) $(E)=(C)$ حيث (Γ) المنحنى الممثل للدالة g^{-1} في المعلم $(o;i;j)$.

أ- أحسب $f(x)$ f لكل x من IR_-^*.

ب- بين أن(E) متماثلة بالنسبة لـــ (D).

ت- أنشئ(E) .

تمرين 7:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x)=\dfrac{3}{x}+\ln x$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,i\ ,j)$.

1. حدد D مجموعة تعريف f.
2. احسب نهايات f عند محدات D.
3. احسب $f'(x)$ وحدد إشارتها على D.
4. ضع جدول تغيرات f على D.
5. ادرس الفروع اللانهائية لـــ (C).
6. احسب $f''(x)$ و ادرس إشارتها على D .
7. بين أن $I\left(6\ ;\ \dfrac{1}{2}+\ln 6\right)$ نقطة انعطاف لــــ(C).
8. أنشء(C).

تمرين 8:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,i\ ,j)$.

1. حدد D مجموعة تعريف f. و بين أن f دالة فردية.
2. احسب نهايات f عند محدات D.
3. احسب $f'(x)$ وحدد إشارتها على D.
4. ضع جدول تغيرات f على D.
5. ادرس الفروع اللانهائية لــــ (C) .
6. أنشء(C).

تمرين 9:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-\ln x}}$ و $f(0)=0$.

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,i\ ,j)$.

1. بين أن الدالة f معرفة على المجال $D=\left[0;e^2\right[$.
2. أ - احسب $\lim\limits_{\substack{x\to e^2\\ x\ \ e^2}} f(x)$ و أول مبيانيا النتيجة .

ب - ادرس اتصال ثم اشتقاق f على يمين $x_0=0$.

3. بين أن $f'(x)=\dfrac{1}{2x\left(\sqrt{2-\ln x}\right)^3}$ و استنتج إشارة $f'(x)$ على $\left]0;e^2\right[$.
4. ضع جدول تغيرات f على D.
5. أنشء(C).

تمرين 10:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, i, j).

1. حدد D مجموعة تعريف f ثم احسب نهايات f عند محدات D.
2. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-1,+\infty[$.
3. ضع جدول تغيرات f على D.
4. بين أن $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ثم ادرس الفروع اللانهائية ل (Cf).
5. بين أن لكل x من D : $f''(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$
6. ادرس تقعر (C) و حدد احداثيات نقطة الانعطاف I .
7. أنشىء(C). ثم حل مبيانيا المتراجحة $f(x) \quad 0$.

تمرين 11:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x) = x + \ln x^2$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, i, j).

1. حدد D مجموعة تعريف f ثم احسب نهايات f عند محدات D.
2. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على D.
3. ضع جدول تغيرات f على D.
4. ادرس الفروع اللانهائية ل (C)
5. أنشىء(C).

تمرين 12:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x) = x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, i, j).

1. حدد D مجموعة تعريف f. و بين أن f دالة فردية .
2. حدد نهايات f عند محدات D, ثم ادرس تغيرات f على D.
3. ادرس الفروع اللانهائية ل (C).
4. ارسم (C).
5. نعتبر الدالة G بحيث: G(x)=(x-1)ln(x-1)-(x+1)ln(x+1) , $x \quad 1$
6. بين أن G دالة أصلية للدالة : $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على $]1,+\infty[$.
7. احسب مساحة جزء المستوى المحصور ب (C) و المستقيمات المعرفة بالمعادلات : x=2 و x=4 و y=x
(لاحظ أن $f(2) \quad 0$) .

تمرين 13:

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x :

$$\begin{cases} f(x) = x - e^{\frac{1}{x}} & ; x \quad 0 \\ f(0) = 0 & \\ f(x) = x \ln x & ; x \quad 0 \end{cases}$$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, i, j).

1.
أ- حدد D مجموعة تعريف f ثم احسب نهايات f عند محدات D.
ب- ادرس اتصال f في $x_0 = 0$.
ت- ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار و على اليمين في $x_0 = 0$ ثم أول هندسيا النتيجتين المحصلتين.
2. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $D - \{0\}$.
3. ضع جدول تغيرات f على D.

4. ادرس الفروع اللانهائية ل (C)
5. أنشئ(C).

تمرين 14:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x)=e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,i\ ,j\ )$.

1.
   أ- حدد D مجموعة تعريف f.
   ب- احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة .
2. بين أن : $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ ماذا تستنتج ؟
3. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $D-\{0\}$.
4. ضع جدول تغيرات f على D.
5. أ - أثبت أن (C) منحنى f يقبل نقطة انعطاف أفصولها $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$.
6. ب - أنشئ(C).

تمرين 15:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x)=2x-\dfrac{9e^{x}}{1+e^{x}}$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ممنظم $(O,i\ ,j\ )$.

1. حدد D مجموعة تعريف f .
2. حدد نهايات f عند محدات D.
3. احسب $f'(x)$, و ادرس إشارتها على D.
4. ضع جدول تغيرات f على D.
5. بين أن (C) يقبل مقاربان مائلان يجب تحديدهما.
6. بين أن : لكل x من IR : $f''(x)=\dfrac{9(e^{2x}-e^{x})}{(1+e^{x})^{3}}$
7.
   أ- ادرس تقعر(C) و حدد احداثيات نقطة الانعطافI .
   ب- أثبت أن I مركز تماثل لـــ (C) .
   ت- أنشئ(C).

تمرين 16:

نعتبر الدالة العددية لمتغير حقيقي x : $f(x)=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$

وليكن(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,i\ ,j\ )$ مع $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1cm$

1. حدد D مجموعة تعريف f و بين أن f دالة زوجية .
2. احسب نهايات f عند محدات D و استنتج طبيعة الفروع اللانهائية للمنحنى(C)
3. احسب $f'(x)$ و تحقق أن إشارتها على IR^* هي إشارة $1-e^{x}$
4. ضع جدول تغيرات f على D ثم ارسم (C)
5. احسب مساحة جزء المستوى المحصور بــــ (C) ومحور الأفاصيل و المستقيمان $x=\ln 2$ و $x=2\ln 2$
6. نعتبر g قصور f على $]-\infty,0[$

أ- بين أن g تقابل من $]-\infty,0[$ نحو $]0,+\infty[$

ب- لكل x من $]0,+\infty[$ بين أن: $e^{g^{-1}(x)}=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x+1}}{2x}$

ت- ارسم (Γ) منحنى الدالة g^{-1} في المعلم (O,i,j) .

التمرين 17:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{-x+\ln|x|}{x}} & , x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ ــ حدد D مجموعة تعريف الدالة f و احسب نهايات f عند محدات D .

ب ــ بين أن f متصلة على يمين 0.

ج ــ هل f متصلة على يسار 0 ؟

2) بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 وأن $f_d'(0)=0$.

3) أ ــ احسب $f'(x)$ لكل x من IR^* .

ب ــ ادرس إشارة $f'(x)$ على IR^* ثم أعط جدول تغيرات f على D .

4) أ ــ ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى(C).

ب ــ أدرس وضع(C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{e}$

5) أنشئ(C).

التمرين 18:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما لي :

$$\begin{cases} f(x)=(x^2+1)e^{\frac{1}{x}} & ,x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ ــ احسب النهايتين $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

ب ــ ادرس اتصال و اشتقاق الدالة f على يسار 0,

2) أ ــ بين أن $f'(x)=(x-1)\dfrac{2x^2+x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ لكل x من IR^* .

ب ــ ادرس إشارة $f'(x)$ على IR^* ثم ضع جدول تغيرات f على IR .

3) أ ــ ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى(C).

ب ــ أنشئ(C).

التمرين19:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما لي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{1+\ln(x)} & , x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ ـ بين أن f معرفة على $D=\left[0,\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$.

ب ـ احسب $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ ـ بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 وأن $f_d^{'}(0)=1$.

ب ـ حدد معادلة ديكارتية لنصف مماس(C) في أصل المعلم .

3) أ ـ احسب $f'(x)$ لكل x من $D-\{0\}$ وأثبت أن الدالة f تزايدية قطعا على كل من المجالين $\left]\frac{1}{e}+\infty\right[$ و $\left[0,\frac{1}{e}\right[$.

ب ـ أعط جدول تغيرات f على D .

4) بين أن $f''(x)=\dfrac{-1+\ln x}{x(1+\ln x)^3}$ لكل x من $D-\{0\}$ ثم استنتج أن (C) يقبل نقطة انعطاف .

5) أ ـ بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته : $y=x$.

ب ـ أدرس وضع(C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

6) g قصور الدالة f على المجل $\left]\frac{1}{e}+\infty\right[$ = I .

أ ـ بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده

ب ـ ضع جدول تغيرات g^{-1} على J واحسب$(g^{-1})'(0)$

7) أنشئ (C) و(Γ) منحنى الدالة g^{-1} في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين20:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{1-\ln x}\,,\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ بين أن الدالة f معرفة على المجال I=[0 , e].

ب ـ بين أن f متصلة على يمين 0.

ج ـ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 على اليمين , ثم أول هندسيا هذه النتيجة

2) أ ـ تحقق أن : $\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}\,\dfrac{\ln(x)-\ln(e)}{x-e}$ $(\forall x\in]0,e[)$.

ب ـ استنتج قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في e ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

3) أ ـ احسب $f'(x)$ على]0 ,e[ثم ادرس إشارتها .

ب ـ ضع جدول تغيرات f على I .

ت - احسب $f(\sqrt{e})$ و $f'(\sqrt{e})$ وأعط معادلة مماس منحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول $\sqrt{e}$.

4) أنشئ (C).

الجزء الثاني:

نضع : $(\Gamma)=\{M(x,y)\in(P):y^2-x^2(1-\ln|x|)=0\}\cup\{O\}$

1) أ ـ بين أن $M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow |x| \le e$

ب ـ بين أنه إذا كانت النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى (Γ) فإن النقطتين $M(x,-y)$ و $M(-x,y)$ تنتميان أيضا إلى (Γ)
ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

2) أ ـ تحقق أن (C) و (Γ) منطبقان لكل (x,y) من $[0,e]\times\left[0\,;\sqrt{\frac{e}{2}}\right]$.

ب ـ أنشئ (Γ) .

التمرين 21:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
مع $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2) بين أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{4}\right)$ مركز تماثل المنحنى (C).

3) أ ـ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\ 1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\ 1}} f(x)$.

ب ـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\frac{x}{2}$ ثم أول هندسيا النتيجتين .

4) أ ـ احسب $f'(x)$ لكل x من $\left[\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$ ثم ادرس إشارتها .

ج ـ أعط جدول تغيرات f على D .

5) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم ذي المعادلة $y=-\frac{x}{2}$.

6) أنشئ(C).

7) أ ـ احسب $\int_2^3 \ln(x)\,dx$ و $\int_2^3 \ln(x-1)dx$.

ب ـ استنتج حساب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات المعرفة بــــ :
$x=3$ و $x=2$ و $y=-\frac{x}{2}$

التمرين 22:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{e^x}{e^x+1}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$
مع $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

1) أ ـ بين أن النقطة $\Omega\left(0,\frac{3}{2}\right)$ مركز تماثل المنحنى(C) .

ب ـ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ ـ احسب $f'(x)$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات f على IR.

3) أ ـ بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \frac{x}{2}+1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.
ب ـ ادرس الوضع النسبي للمنحنى(C) و المستقيم (Δ).
ج ـ أنشئ (C) .

4) احسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات $y = \frac{x}{2}+1$ و $x = 0$ و $x = ln2$.

5) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α وأن $\alpha\in]3,4[$.

6) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n)\ ,(\forall n \in IN) \end{cases}$$

أ ـ بين أن $0 \le U_n < \alpha$ $(\forall n\in IN)$.

ب ـ بين أن (U_n) تزايدية قطعا وأنها متقاربة .

ج ـ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

التمرين 23:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) أ ـ احسب $f'(x)$ لكل x من IR وادرس إشارتها .
ب ـ أعط جدول تغيرات f على IR.

3) أ ـ ادرس تقعر المنحنى(C) .
ب ـ حدد معادلة المماس للمنحنى(C) في نقطة تقاطعه مع محور الأراتيب.
ج ـ ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى(C) .
د ـ أنشئ (C) .

الجزء الثاني:

لتكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left[1\ ,\ \frac{4}{e}\right]$

أ ـ بين أن $g(I)\subset I$
ب ـ حدد رتابة g g على المجال I .

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g\quad g(U_n)\ ,(\forall n \in IN) \end{cases}$$

أ ـ بين أن $0 \le U_n < \frac{4}{e}$ $(\forall n\in IN)$.

ب – بين أن (U_n) رتيبة قطعا و متقاربة .

التمرين 24:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

مع $\|\vec{j}\|=2\,cm$ $\|\vec{i}\|=1\,cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين .

2) نضع لكل x من IR^{*+} $h(x)=1-x+\ln(x)$

أ – ادرس إشارة $h(x)$ على IR^{*+}

ب – بين أن $f'(x)=\frac{1}{e^x}h(\frac{1}{e^x+1})$ $(\forall x\in IR)$

ج - ضع جدول تغيرات f على IR.

3) أنشئ (C) , (نقبل أن (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة في النقطة ذات الأفصول α مع $0<\alpha<1$).

4) أ – باستعمال المكاملة بالأجزاء احسب $\int_0^1 f(x)dx$.

(يمكن ملاحظة $(1+e^{-x})'=-1/e^x$)

ب – استنتج حساب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى(C) والمستقيمات $y=0$ و $x=0$ و $x=1$.

5) أ – تحقق أن الدالة f حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'+y=1/(1+e^x)$ (1)

ب – حدد حلا عاما للمعادلة التفاضلية $y'+y=0$.

ج – استنتج حلول المعادلة (1).

التمرين 25:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=\frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

مع $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm$

1) أ – بين أن النقطة $\Omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل المنحنى(C) .

ب – احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة .

2) أ – احسب $f'(x)$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات f على IR.

3) أ – حدد نقطة تقاطع(C) مع محور الأفاصيل .

ب – حدد معادلة المماس (T) للمنحنى(C) في أصل المعلم .

ج – أنشئ (T) و(C) .

4) أ- بين أن: $(\forall x\in IR)\ \ f(x)=\frac{2e^{2x}-e^{-x}}{e^{2x}+e^{-x}}$

ب- استنتج دالة أصلية لـــ f على IR.

ج- احسب مساحة الحيز المحصور بين (C) والمستقيمات $y=0$ و $x=0$ و $x=-\frac{\ln 2}{3}$.

5) لكل x من المجال $I=[2\ln 2, 3\ln 2]$ نضع : $g(x)=f(x)-x$

أ- بين أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال I .

ب- استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال I.

6) نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} U_0 = 2\ln 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

أ- برهن أن: $2\ln 2 \le U_n \le \alpha \quad (\forall n \in IN)$

ب- أثبت أن المتتالية $(U_n)_n$ رتيبة قطعا و متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

7) نقبل المتفاوتة: $\forall x \in [2\ln 2, 3\ln 2] : \ |f(x)-\alpha| \le \frac{7}{50}|x-\alpha|$

أ- أثبت أن : $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{7}{50}\right)^n \quad (\forall n \in IN)$

ب – استنتج قيمة مقربة لـــ α بالدقة 10^{-3}.

التمرين26:

بين أن : $\forall x \in]0,+\infty[\quad 1-x+\ln x \le 0$

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=(1+\ln x)^2-2x$.

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O,i,j)

1) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\ 0}} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة

ب- تحقق أن: $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x)=x\left[\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}+4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2-2\right]$

ج- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+2x\right)$ ثم أول هندسيا النتيجتين

2) أ- تحقق أن: $\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x)=\frac{2}{x}\left(1-x+\ln x\right)$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$

3) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحى (C) في النقطة ذات الأفصول $x_0=\frac{1}{2}$

ب- أثبت أن النقطة $(1,-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C)

ج- أنشئ (C)

التمرين27:

لتكن f الدالة المعرفة على IR بما يلي: $\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O,i,j) $\|i\|=\|j\|=1cm$

1) بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0=0$.

2) أ- تحقق أن: $\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) \quad \forall x \in IR^*$

ب- احسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\ 0}} f(x)$ و $\lim_{|x|\to+\infty}\left(f(x)-x-1\right)$ ثم أول هندسيا النتائج.

3) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من IR^* ثم ادرس إشارتها .

ب- ضع جدول تغيرات f على IR.

4) أ- بين أن : $\forall t \in IR \quad e^t - 1 - t \geq 0$

ب- تحقق أن: $\forall x \in IR^* \quad f(x)-(x+1) = x\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}\right)$

ج- ادرس إشارة $f(x)-(x+1)$ لكل x من IR^* ثم أول هندسيا النتيجتين.

د- أنشئ (C).

5) لكل λ من المجال $]0,1]$ نضع $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1} xe^{\frac{1}{x}}dx$

أ- أول هندسيا العدد $A(\lambda)$

ب- بوضع $x=\frac{1}{t}$ بين أن: $\int_{\lambda}^{1} xe^{\frac{1}{x}}dx = \int_{1}^{\frac{1}{\lambda}} \frac{e^t}{t^3}dt$

ج- أثبت أن $\forall t \in \left[1,\frac{1}{\lambda}\right] : \lambda^3 \quad \frac{1}{t^3} \quad 1$

د- استنتج أن: $\forall \lambda \in]0,1] \quad e^{\frac{1+3\lambda\ln\lambda}{\lambda}} \quad A(\lambda) \quad e^{\frac{1}{\lambda}}-1$ ثم احسب $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\ 0}} A(\lambda)$

تمرين28:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=(2+x)\ln\left(\frac{1}{x^2+4x+5}\right)$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ممنظم (O,i,j)

1) أ- تحقق أن f معرفة على IR.

ب- بين أن $\Omega(-2,0)$ مركز تماثل للمنحنى (C).

ج- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة .

2) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من IR و استنتج أن f تناقصية قطعا على IR.

ب- ضع جدول تغيرات f على IR.

3) أ- أثبت أن Ω نقطة انعطاف للمنحنى (C).

ب- أنشئ (C).

4) نضع $g(x)=f(-x) \quad (x\in IR)$

أ- بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[4,5]$

ب- أثبت أن الدالة g تقابل من IR نحو IR ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي g^{-1}

ج- أنشئ (Γ) منحنى الدالة g^{-1} في المعلم (O,i,j)

5) نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad n\in \end{cases}$

أ- بين أن : $0\leq u_n \leq \alpha \quad \forall n \in$

ب- أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية و أنها متقاربة.

ج- أثبت أن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

تمرين29:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x - \frac{x}{(\ln x)^2 - 2(\ln x) + 2} \text{ و } f(0) = 0$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ممنظم (O,i,j)

1) أ- تحقق أن f معرفة على IR^+ و احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر وأن $f'_d(0) = 1$

ج- بين أن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

2) أ- بين أن : $f'(x) = \frac{\left((\ln x)^2 - \ln x\right)\left((\ln x)^2 - 3\ln x + 4\right)}{\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)^2}$ $\forall x \in {}^*$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f على IR^+

3) أ- بين أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y = x$

ب- احسب $f(e)$ ثم أنشئ (C).

4) لتكن g قصور الدالة f على المجال $[e,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $[e,+\infty[$ نحو IR^+

ب- ادرس اشتقاق g^{-1} على يمين $x_0 = 0$

5) نضع $h(x) = (g^{-1} \quad f)(x)$ $\forall x \in {}^+$

أ- ادرس اشتقاق h في $x_0 = 0$ ثم في $x_0 = e$

ب- بين أن h و f لهما نفس التغير في كل من المجالين $]1,e[$ و $]0,1[$

ج- أنشئ (Γ) منحنى الدالة h في المعلم (O,i,j)

تمرين30:

لتكن الدالة f العددية المعرفة علىIR بما يلي:

$$f(x) = 3 - 2x + \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ و } f(0) = 3$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O,i,j)

1) أ- بين أن: $(\forall x \in \quad) : f(-x) = 6 - f(x)$ ثم أول العلاقة مبيانيا.

ب- أثبت أن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$

ج- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من IR_+^* ثم تحقق أن: $(\forall x \in {}^*) : f'(x) \quad 0$

ب- ضع جدول تغيرات f على IR.

3) أ- بين أن المستقيم $(D) : y = 3 - 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) ثم ادرس وضع (C) بالنسبة للمستقيم (D)

ب- بين أن $I(0,3)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C)

ج- أنشئ (C)

4) نضع $g(x)=\left(\dfrac{e^x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2x}}}\right)^2$ $\quad (\forall x\in {}^*)\quad$ و $g(0)=1$

أ- تحقق أن: $g(x)=e^{3-f(x)}\quad (\forall x\in \ )$

ب- ادرس تغيرات g على IR

ج- أنشئ (Γ) منحنى g في المعلم (O,i,j)

تمرين31:

لتكن الدالة g العددية المعرفة على IR_+^* بما يلي: $g(x)=2\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}$

1) تحقق أن $\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}=1+\dfrac{2}{\dfrac{x}{\ln x}-1}\qquad (\forall x\in {}_+^*)$

2) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\ \ 0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- بين أن: $g'(x)=4\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\qquad (\forall x\in {}_+^*)$

ج- ضع جدول تغيرات g على IR_+^*

3) نضع $x\ \ 0,\quad f(x)=g(x)$ و $f(0)=-2$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O,i,j)

أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0=0$ وأن $f'_d(0)=0$

ب- ادرس الفرع اللانهائي ل (C)

ج- أنشئ (C) (احسب $f(1);f(2);f(8)$)

4) لكل n من $IN^*-\{1\}$: نضع $u_n=\dfrac{e^n+n}{e^n-n}$

أ- تحقق أن: $u_n=\dfrac{1}{2}g(e^n)\quad \forall n\in {}^*-\{1\}$

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تناقصية و أنها محدودة.

ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين32:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على ${}^+-\{e^{-2}\}$ بما يلي:

$,x\in {}_+^*-\{e^{-2}\}\qquad f(x)=x\dfrac{2-\ln x}{2+\ln x}$ و $f(0)=0$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O,i,j)

1) تحقق أن $\dfrac{2-\ln x}{2+\ln x}=\dfrac{\dfrac{2}{\ln x}-1}{\dfrac{2}{\ln x}+1}\qquad \forall x\in \left]0,\dfrac{1}{e^2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e^2},1\right[\cup]1,+\infty[$

2) أ- أثبت أن f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر

ب- احسب $\lim\limits_{x\to e^{-2}} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين

ج- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)+x$ ثم أول هندسيا هذه النتائج .

3) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{e^2}\right\}$

ب- استنتج أن f تناقصية قطعا على كل من المجالين $\left[0,\frac{1}{e^2}\right[$ و على $\left]\frac{1}{e^2},+\infty\right[$

ج- ضع جدول تغيرات f على $\mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{e^2}\right\}$

4) أ- أثبت أن النقطة $I(1,1)$ نقطة انعطاف (C)

ب- حدد تقاطع (C) مع محور الأفاصيل ثم أنشئ (C) من أجل $\frac{1}{e^2} \quad x$

5) أ- تحقق مبيانيا أن لكل n من IN ، المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $\left]\frac{1}{e^2},+\infty\right[$

ب- احسب x_0 و x_1

6) أ- بين أن المتتالية $(x_n)_n$ تناقصية

ب- بين أن $e^2 \quad x_n \quad \frac{1}{e^2}$ لكل n من IN و أن $(x_n)_n$ متقاربة

ج- بين أن $\frac{4}{n}e^2 \quad 2+\ln x_n \quad 0$ لكل n من IN ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} x_n$

تمرين 33:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\ln|x| & ,x\in \mathbb{R}^*-\{1\} \\ f(1)=f(0)=0 \end{cases}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O,i,j) $\quad \|i\|=\|j\|=2cm$

1) أ- بين أن المستقيم $(\Delta):\quad x=\frac{1}{2}$ محور تماثل المنحنى (C)

ب- بين أن f متصلة في $x_0=1$

ج- ادرس قابلية اشتقاق f في $x_0=1$

2) أ- أثبت أن $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=-1$

ب- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجتين

3) أ- تحقق أن $f'(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \quad \forall x\in \mathbb{R}^*-\{1\}$

ب- أثبت أن f تناقصية قطعا على $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على IR

4) أ- ادرس تقعر المنحنى (C)

ب- أنشئ (C)

5) نضع
$$\begin{cases} F(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}\ln|x-1|-\dfrac{x^2}{2}\ln|x|+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4} \quad ; x\in \ {}^{*}-\{1\} \\ F(1)=\dfrac{1}{4}\ ,\ F(0)=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

أ- أثبت أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على IR.

ب- استنتج مساحة الحيز المحصور بين (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=1$

6) حل في IR المتراجحة $|x-1|^{x-1}-|x|^{x}\geq 0$

تمرين34:

الجزء الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $g(x)=-x+(1-x)e^{(1-2x)}$

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

ب- احسب لكل x من IR $g'(x)$ و $g''(x)$

ج- استنتج أن : $g'(x) \quad 0$. $\forall x\in IR$

2) بين أن الدالة g تناقصية قطعا على IR ثم استنتج إشارتها (لاحظ أن $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$)

الجزء الثاني:

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب:
$$f(x)=\begin{cases} g(x) & ; x\geq \dfrac{1}{2} \\ \ln(g(x)) & ; x \quad \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O,i,j).

1) أ- تحقق أن f معرفة على IR

ب- ادرس اتصال f في $x_0=\dfrac{1}{2}$

ج- ادرس اشتقاق f في $x_0=\dfrac{1}{2}$

2) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من $IR-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

ب- ضع جدول تغيرات f على IR

3) أ- بين أن $\mathrm{I}(2,f(2))$ نقطة انعطاف للمنحنى

ب- بين أن المستقيم $(D): y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ ثم ادرس وضع (C) بالنسبة لـــ (D) في حالة $\left(x \quad \dfrac{1}{2}\right)$.

4) أ- بين أن: $x \quad 0 \Rightarrow \left(f(x)=1-2x+\ln(-x)+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\dfrac{x}{x-1}e^{2x-1}\right)\right)$

ب- بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم $(\Delta): y=-2x$ بجوار $-\infty$

ج- أنشئ I و (D) و (Δ) و (C) (نقبل أن $f''(x) \quad 0$ لكل $x\leq\dfrac{1}{2}$)

تمرين35:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR_-^* بما يلي : $f(x)=2x-\dfrac{\ln(-x)}{x^2}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

.1

أ- احسب : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بين أن : $\forall x\in IR_-^* \ : \ f'(x)=\dfrac{2x^3-1+2\ln(-x)}{x^3}$

.2 نضع $\forall x \quad 0: \ u(x)=2x^3-1+2\ln(-x)$

أ- بين أن الدالة u تقبل قيمة قصوى مطلقة سالبة .

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f على IR_-^* .

.3

أ- بين أن المستقيم (D) : $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) و ادرس وضع (C) بالنسبة لـــ (D) .

ب- بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف .

ت- أنشىء (D) و (C) مبرزا المماس لـــ (C) في النقطة $(-1,-2)$.

.4 نضع : $g(x)=\dfrac{e^{-2x}}{2}\left(-xe^{4x}-2e^{3x}+2e^{x}-x\right)$

أ- تحقق أن : $\forall x\in IR: g(x)=\dfrac{1}{2}\left[f\left(-e^{x}\right)-f\left(-e^{-x}\right)\right]$

ب- بين أن الدالة g فردية و احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$

ت- ضع جدول تغيرات g على IR .

ث- أنشىء (C_g) منحنى الدالة g في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ مبرزا المماس لـــ (C_g) في النقطة .

.5 حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة : $2\left(e^{x}-e^{-x}\right)+x\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)=m$ حيث m بارا متر حقيقي .

تمرين36:

الجزء الأول:

f دالة عددية معرفة على IR بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-e^{x^2-\sqrt{2}x}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى P المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

.1 بين أن المستقيم $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ محور تماثل لـــ (C) .

.2

أ- ادرس تغيرات الدالة f (الرتابة و النهايات) .

ب- أنشىء (C) .

الجزء الثاني:

لتكن f_a الدوال العددية المعرفة على IR بما يلي : $f_a(x)=|x-a|-e^{2ax-x^2}$ $\quad (a\in IR)$

(C_a) المنحنى الممثل لـــ f_a في المستوى (P).

.1

أ- بين أن المستقيم: x=a محور تماثل لـــ (C_a) .

ب- بين أن $f_{-a}(x) = f_a(-x) \quad : \quad \forall(x,a) \in IR^2$ ثم أول هندسيا النتيجة .

.2

أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_a(x) - x + a\right)$ ثم أول هندسيا النتيجة .

ب- بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x \quad a}} \dfrac{f_a(x) - f_a(a)}{x-a} = 1$

ت- احسب $f'_a(x)$ واستنتج أن f_a تزايدية قطعا على $]a,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات f_a على IR.

.3

أ- ادرس الوضع النسبي لـــ (C_a) و (C_b) على المجال $]b;+\infty[$ حيث $b \quad a \quad 0$.

ب- بين أن $I_a\left(a+\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; f_a\left(a+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ نقطة انعطاف لـــ (C_a) .

ت- أثبت أن (C) هي مجموعة النقط I_a عندما يتغير a فيIR .

.4

أ- بين أن المعادلة $f_a(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_a في المجال $]a,+\infty[$.

ب- أثبت أن الدالة $x_a \quad a$ تزايدية على IR^+ .

.5 أنشىء (C_a) من أجل $a \quad x$ في الحالات الآتية : a=0 ; a=1 ; a=2 ; a= -2 .

تمرين37:

لتكن f الدالة العددية المعرفة علىIR بما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 2+(2-x)^{\frac{5}{3}} & ; \ x \quad 2 \\ x-(x-1)\ln(x-1) & ; \ x \geq 2 \end{cases}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O,i,j)

.1

أ- بين أن: $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 2$ وأن $f'(2) = 0$

ث- احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتائج .

.2

أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من $IR-\{2\}$ ثم ضع جدول تغييرات f

ب- : بين أن $I(2;2)$ هي نقطة انعطاف المنحنى (C) ند كر أن $(\forall x \quad 0 \ ; \ln x \leq x-1)$

ت- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α من المجال$[4;5]$

ث- أنشئ المنحنى (C)

.3

أ- بين أن f تقابل منIR نحوIR ثم أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من$]-\infty;2]$

ب- حدد $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{f^{-1}(x)-2}{x-2}$

.4 لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي $u_{n+1} = (fof)(u_n)$ و $u_0 = 1$

أ- بين أن $1 \leq u_n \quad 2 \quad \forall n \in IN$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية وأنها متقاربة.

ت- أحسب $\lim u_n$.

تمرين38:

الجزء الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR^+ بما يلي: $\mathrm{g(x)} = \dfrac{\mathrm{e^x} - 1}{x} \; ; \; \mathrm{x} \quad 0$ و $g(0) = 1$

(C) المنحنى الممثل للدالة g في المعلم المتعامد الممنظم $(o;i;j)$

.1

أ- بين أن الدالة g متصلة على IR^+

ب- احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين

.2

أ- بين أن : $\forall x \in IR_+^* \; \mathrm{g'(x)} = e^x \left(\dfrac{\mathrm{x - 1 + e^{-x}}}{x^2} \right)$

ب- بين أن g تزايدية قطعا على IR^+ ندكر أن $(\forall x \in IR \quad \mathrm{e^x} \geq x + 1)$.

ت- ضع جدول تغيرات g نقبل أن $\left(g'_d(0) = \dfrac{1}{2} \right)$

ث- أنشئ المنحنى (C)

الجزء الثاني:

نضع $\forall n \in IN^* \quad f_n(x) = g(x) + n \ln x \; ; \mathrm{x} \quad 0$

ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في المعلم $(o;i;j)$.

.1

أ- بين أن الدوال f_n تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$

.2

أ- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحى (C_n).

ب- بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة محددا إحداثياتها.

ت- ادرس الوضع النسبي لـ (C_n) و (C_{n+1}) ثم لـ (C_n) و (C).

.3

أ- بين أن لكل n من IN^* ، المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n و أن x_n ينتمي إلى المجال $]0\,,1[$

.

ب- أثبت أن : $1 \quad x_n \qquad e^{\frac{-g(1)}{n}} \; \left(\forall n \in IN^* \right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

ت- بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تزايدية .

.4 أنشء (C_1) و (C_2).

تمرين 39:

الجزء الأول:

لتكن f الدالة العددية المعرفة علىIR بما يلي: $f(x) = \begin{cases} e^{4(3+x-3\sqrt{1+x})} & ; \mathrm{x} \quad 0 \\ 1 + 2\ln(1-x) & ; \mathrm{x} \leq 0 \end{cases}$

(C) المنحنى الممثل للدالةf في المعلم المتعامد الممنظم $(o;i;j)$.

1. أحسب النهايات $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتائج.

2.
   - أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من IR^* ثم أدرس إشارتها
   - ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$
   - ت- ضع جدول تغيرات f على IR

3. بين أن $I(0;1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

4. ليكن g قصور f على المجال $\left[\frac{5}{4};+\infty\right[$
   - أ- بين أن g تقابل من $\left[\frac{5}{4};+\infty\right[$ نحو $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.
   - ب- بين أن : $g^{-1}(x) = -1 + (\frac{3+\sqrt{1+\ln x}}{2})^2$ $\quad \forall x \in \left[\frac{1}{e};+\infty\right[$

5.
   - أ- أحسب $f(3)$; $f'(3)$
   - ب- أنشئ (C) و (Γ) منحنى التقابل العكسي g^{-1} في المعلم $(o;i;j)$

الجزء الثاني:

نضع لكل n من IN $\quad u_{n+1} = -1 + (\frac{3+\sqrt{1+u_n}}{2})^2 = g^{-1}(e^{u_n})$ و $u_0 = 24$

1.
   - أ- بين أن $8 \quad u_n \leq 24 \quad \forall n \in IN$
   - ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية و أنها متقاربة

2.
   - أ- بين أن $g^{-1} o \exp([8;24]) \subset [8;24]$
   - ب- أحسب $\lim u_n$

3.
   - أ- نضع لكل n من IN $\quad v_n = -3 + \sqrt{1+u_n}$
   - ب- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
   - ت- أحسب v_n بدلالة n
   - ث- استنتج أن $u_n = 8\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \forall n \in IN$

عناصـــر الإجـــابـــة

تمرين1:

-1	1
-2	2
-3	0
-4	1+2+3+4+……………..+p
-5	$-\infty$
-6	$-\infty$
-7	0
-8	0
-9	0
-10	على اليسار 0 وعلى اليمين $+\infty$
-11	2
-12	0
-13	$+\infty$
-14	0

تمرين2:

-1
$$x=\frac{\ln\left(\frac{\ln 5}{\ln 3}\right)}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$$

-10
$$S=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

تمرين3:

$$S=\{(2,4)\}$$

تمرين4:

-3 $u_n=\log_2(n!)\quad n\in IN^*$

تمرين5:

1- أ - : $f'(x)\geq 0$ و $g'(x)\leq 0$ على IR_+ .

-2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\dfrac{-1}{2}$

تمرين6:

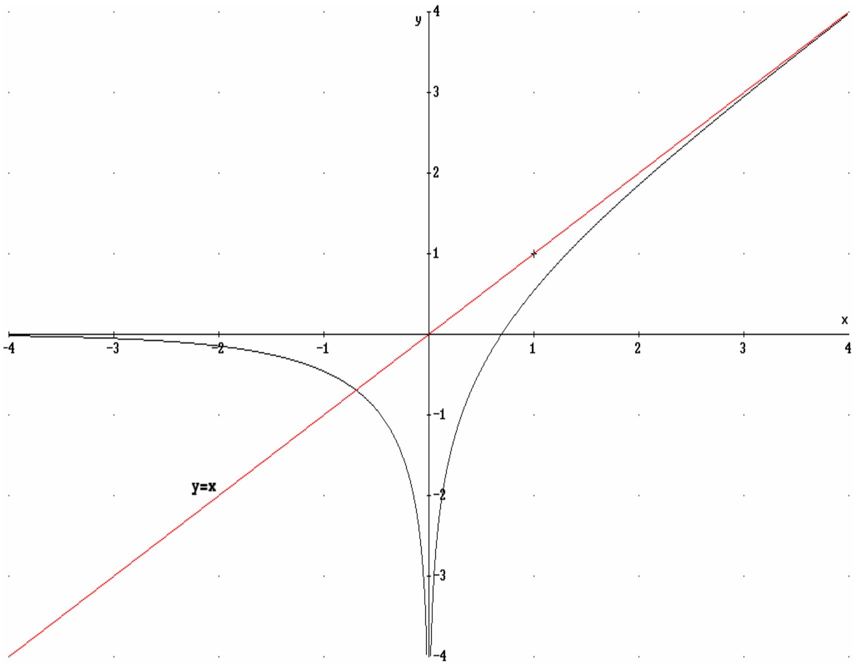
2- أ-: $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ $(x\neq 0)$

ب-: بجوار $+\infty$: $f(x)-x=\ln\left(1-e^{-x}\right)$

3- أ- : g متصلة و تزايدية قطعا على IR_+

- ب- : $g^{-1}(x)=\ln\left(e^x+1\right)$ $\forall x\in IR$

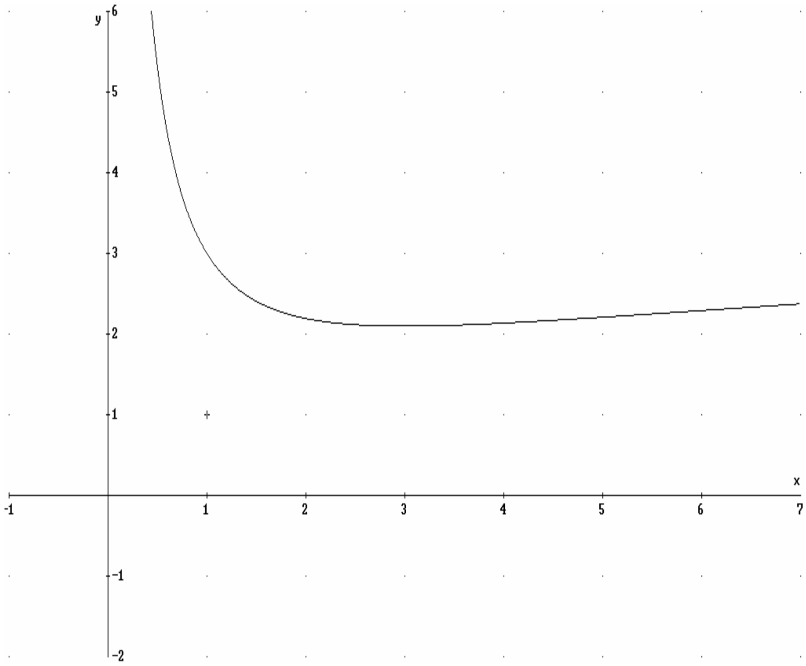
4- أ- : $\begin{cases} x \quad 0 \quad f \quad f(x)=\ln\left|e^x-2\right| \\ x \quad 0 \quad f \quad f(x)=x \end{cases}$



تمرين7:

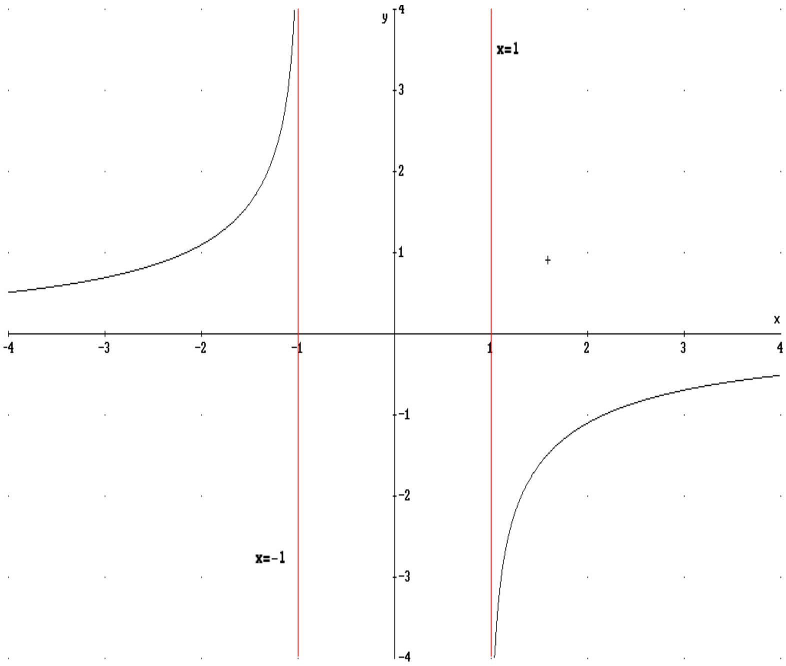
-3 $f'(x)=\dfrac{x-3}{x^2}$ $x \quad 0$

-6 $f''(x)=\dfrac{6-x}{x^3}$ $x \quad 0$



تمرين8:

-3 $f'(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ $|x|$ 1

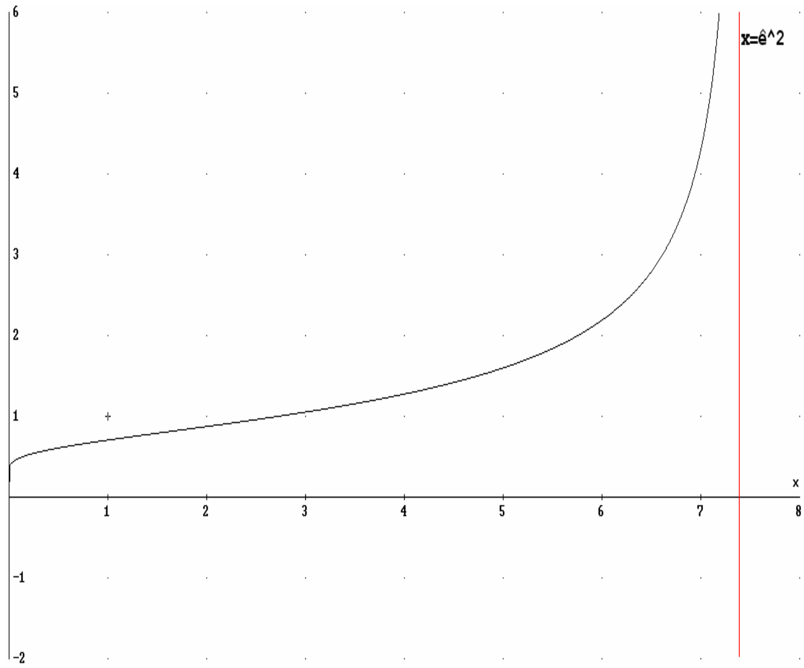


تمرين9:

-2 أ- $\lim\limits_{\substack{x \to e^2 \\ x \; e^2}} f(x) = +\infty$

- ب- f متصلة على يمين $x_0 = 0$ و غير قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ و (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$.

-3 لكل x من $]0;e^2[$: $0 \quad f'(x)$

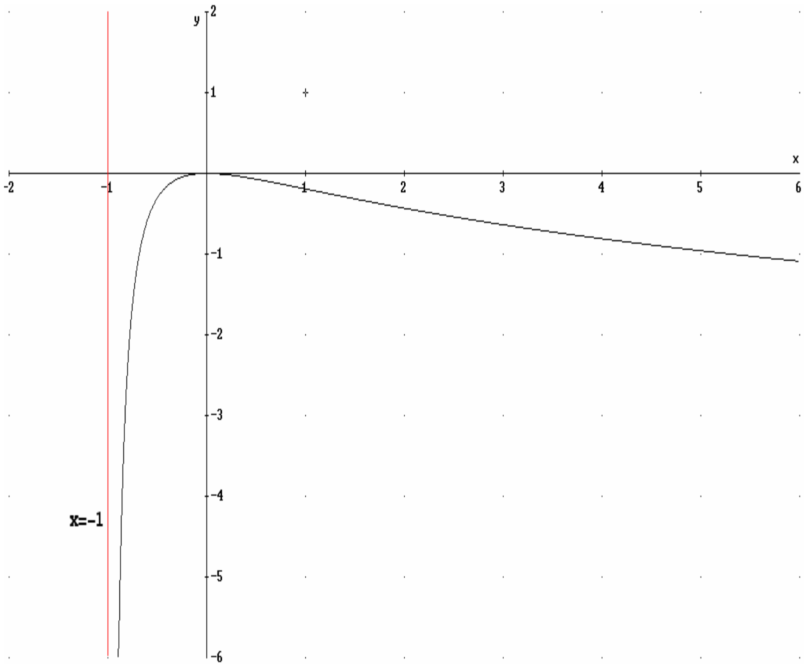


تمرين10:

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \ , \ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$

2- $f'(x)=-\dfrac{x}{(x+1)^2} \qquad x \quad -1$

التمثيل المبياني :



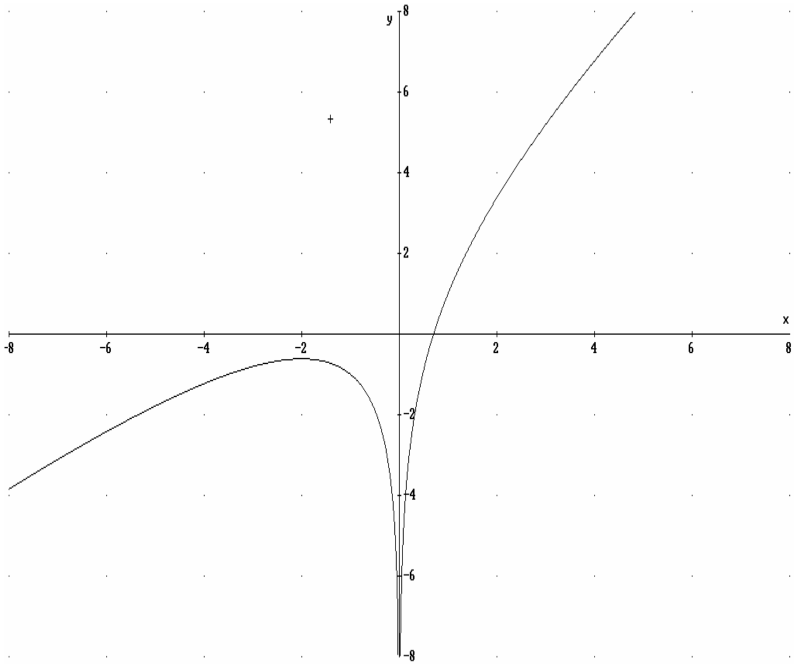
تمرين11:

-2 $\forall x \in IR^* \quad ; \quad f'(x) = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$

-4 (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=x$.

-5

التمثيل المبياني:



تمرين12:

-1 f دالة فردية و ذلك لأن:

$$f(-x) = -x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)$$

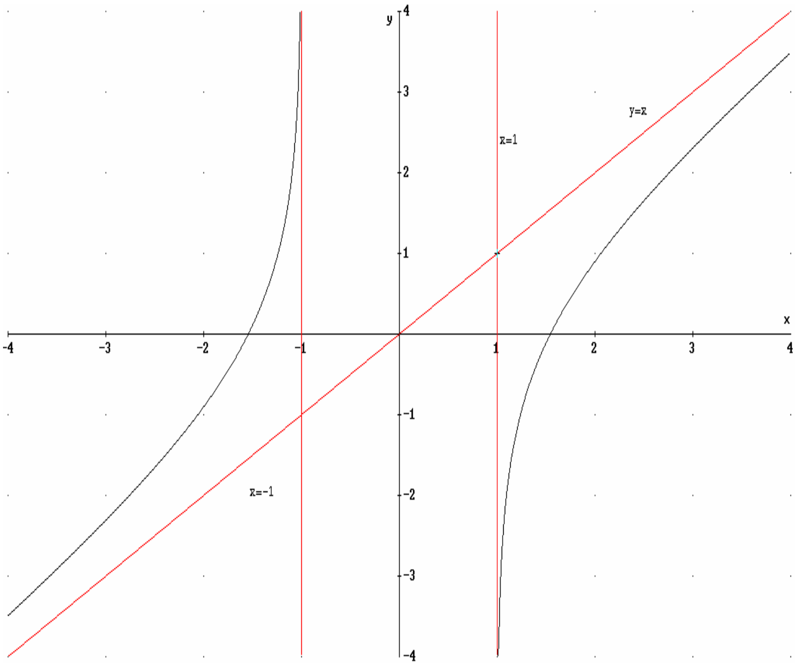
$$= -x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= -x + \ln\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\right) \qquad |x| \quad 1$$

$$= -x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= -f(x)$$

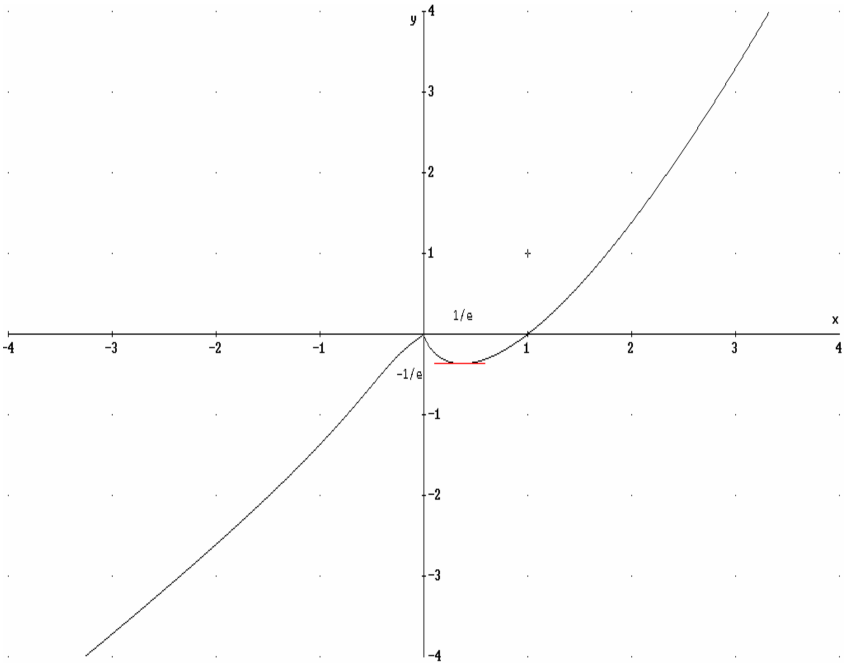
-6 $A(\Delta) = \int_2^4 \left|\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right| dx = \left[-G(x)\right]_2^4 = G(2) - G(4)$



تمرين13:

1- ت- f غيرقابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$.

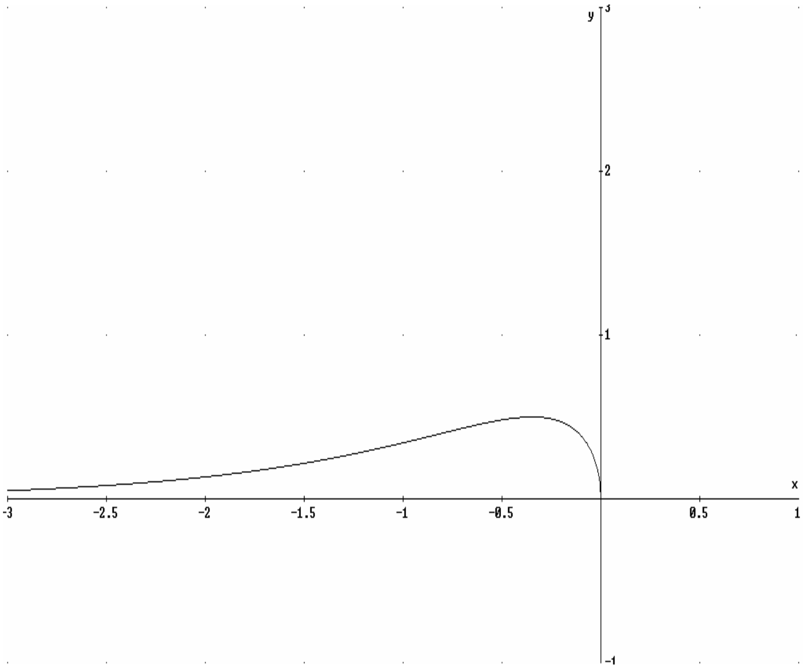
-2
$$\begin{cases} f'(x) = 1 + \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & ; \quad x \quad 0 \\ f'(x) = 1 + \ln x & ; \quad x \quad 0 \end{cases}$$



تمرين14:

-3 $$f'(x) = \frac{e^x(1-2e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}} \quad ; \quad x \quad 0$$

-5 $$f''(x) = \frac{e^x(4e^{4x}-6e^{2x}+1)}{\sqrt{\left(1-e^{2x}\right)^3}} \quad x \quad 0$$



تمرين15:

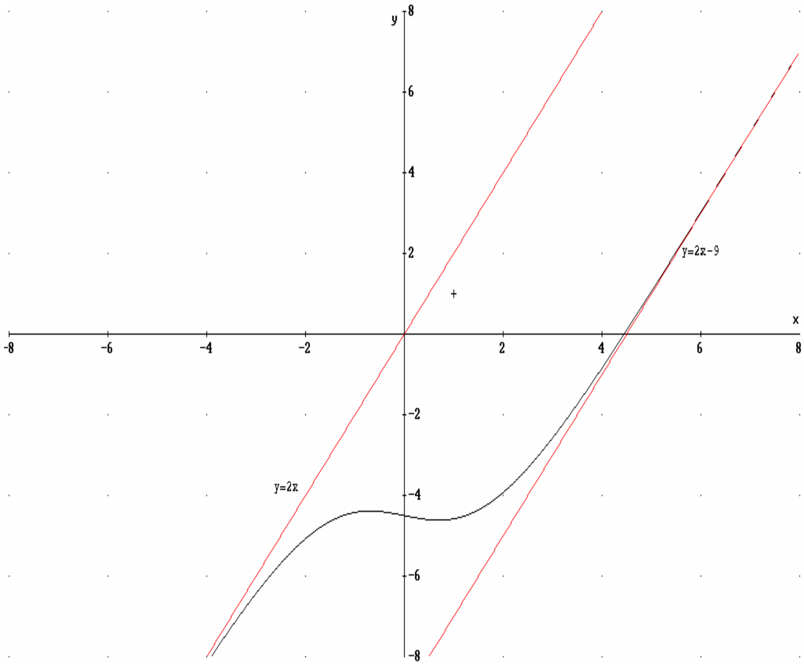
-3 $$f'(x) = \frac{2e^{2x}-4e^x+2}{\left(e^x+1\right)^2} \quad x \in IR$$

-5 $y = 2x$ مقارب مائل لـــ (C) بجوار $-\infty$

$y = 2x - 9$ مقارب مائل لـــ (C) بجوار $+\infty$

-7 أ- $$I\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-9}{2} \end{pmatrix}$$

-ب- $$f(-x) + f(x) = -9 \quad x \in IR$$



تمرين16:

-1 $D_f = IR^{*+}$

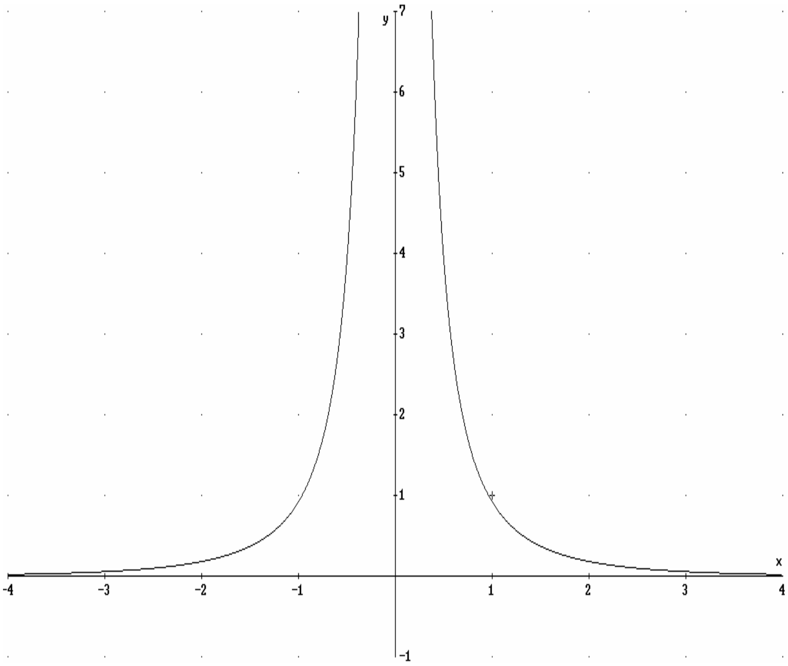
-2 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\ 0}} f(x)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\ 0}} f(x)=+\infty$

-3 $x \in IR^*$; $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)}{(-e^x+1)^2\left(1-e^x\right)}$, f' لها إشارة $1-e^x$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

-4 التمثيل المبياني :



-5 $$\int_{\ln 2}^{2\ln 2} f(x)dx = \left[\frac{1}{1-e^{x}}\right]_{\ln 2}^{2\ln 2} = \frac{2}{3}\,\text{cm}^2$$

تمرين17:

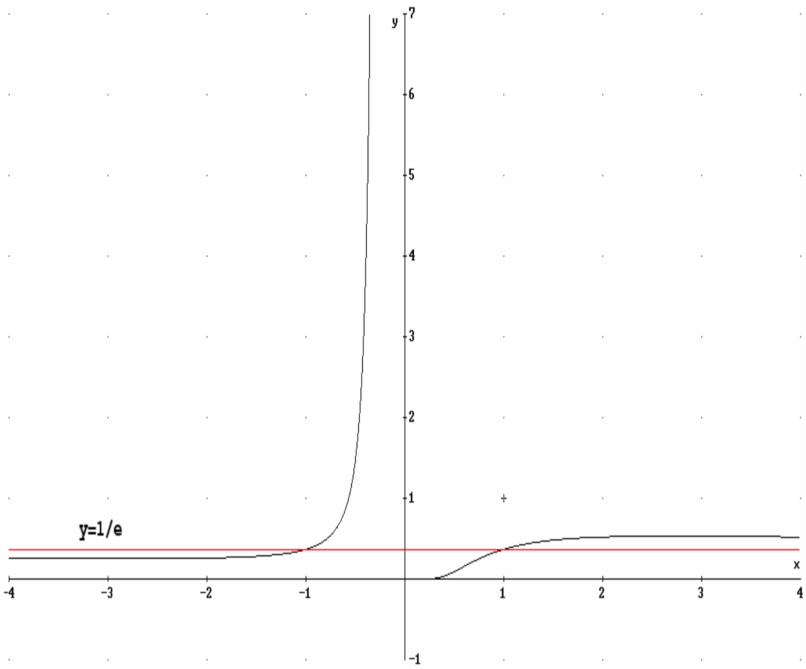
1 - أ - مجموعة التعريف : IR

- ج - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\,0}} f(x) = +\infty$, f غير متصلة في 0 على اليسار

3- ب- $$f'(x) = \frac{1-\ln|x|}{x^2}\exp\left(\frac{-x+\ln|x|}{x}\right) \quad ; \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \text{ أو } x = -e$$

$f(x) = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow x = 1$, أ $x = -1$ (تقاطع C_f مع المستقيم الذي معادلته $y=1/e$)



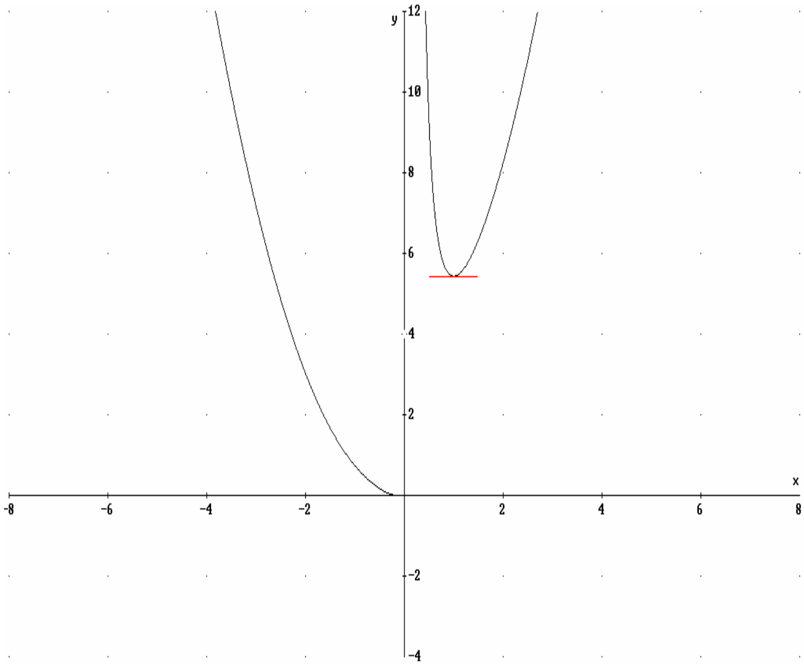
تمرين18:

1 - أ - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\ 0}} f(x)=+\infty$

ب - $f_g'(0)= 0$

2 - أ - فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب عند $-\infty$ و $+\infty$

$$f'(x)=(x-1)\frac{2x^2+x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

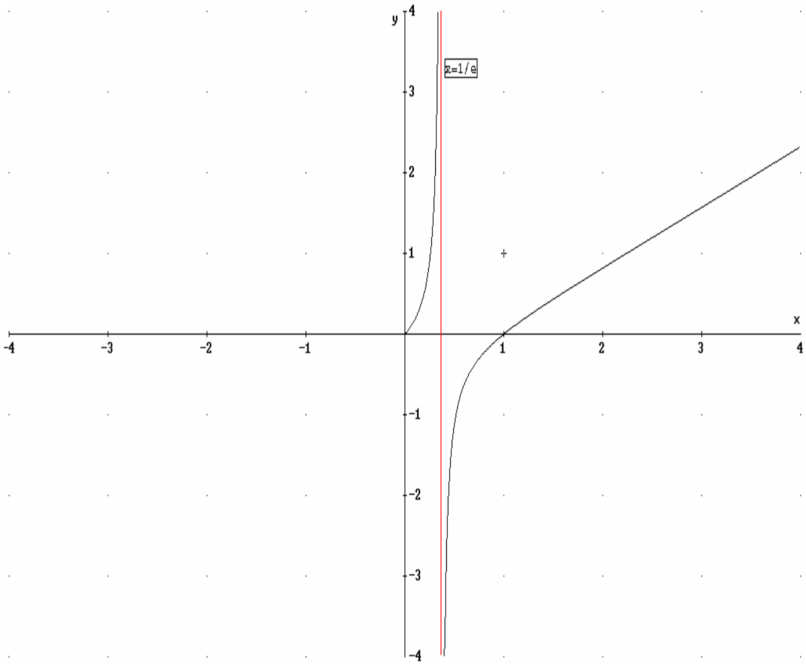


تمرين19:

1 - ب - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x)=-\infty$

3- أ - $$f'(x)=\frac{\ln^2(x)+\ln(x)+1}{(1+\ln(x))^2} \quad ; \quad x\in D$$

6 - $$(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(g^{-1}(0))}=1$$



تمرين20:

الجزء الأول:

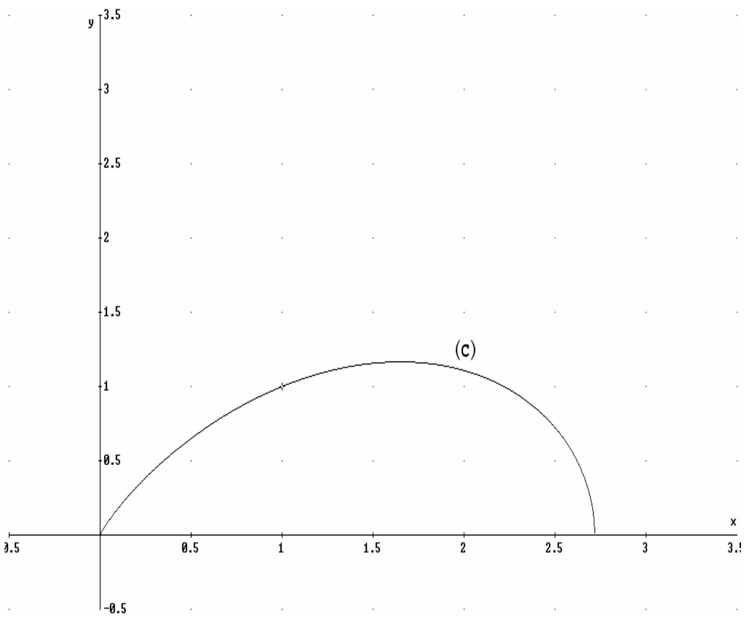
1- ب- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

- ج - $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ إذن (C) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب نحو الأعلى في النقطة $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

2- ب- $\lim_{x\to e^-}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=-\infty$ إذن (C) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول $x_0=e$.

3- أ- $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{2\sqrt{1-\ln x}}$ $\forall x\in]0\ ,e[$

-4



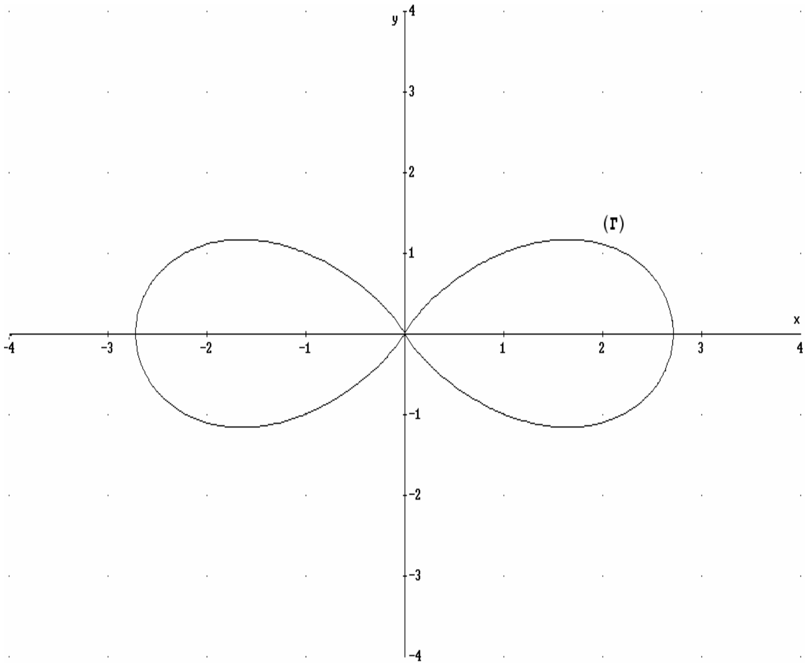
الجزء الثاني:

1- أ- $M(x,y)\in(\Gamma)\Leftrightarrow 1-\ln|x| \Leftrightarrow |x|\le e$

ب - إذا كانت النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى (Γ) فإن النقطتين $M(x,-y)$ و $M(-x,y)$ تنتميان أيضا إلى (Γ) و ذلك لأن: $(-x)^2 = x^2$ و $(-y)^2 = y^2$

إذن (Γ) متماثلة بالنسبة لمحور الأفاصيل و كذلك بالنسبة لمحور الأراتيب .

2- ب-



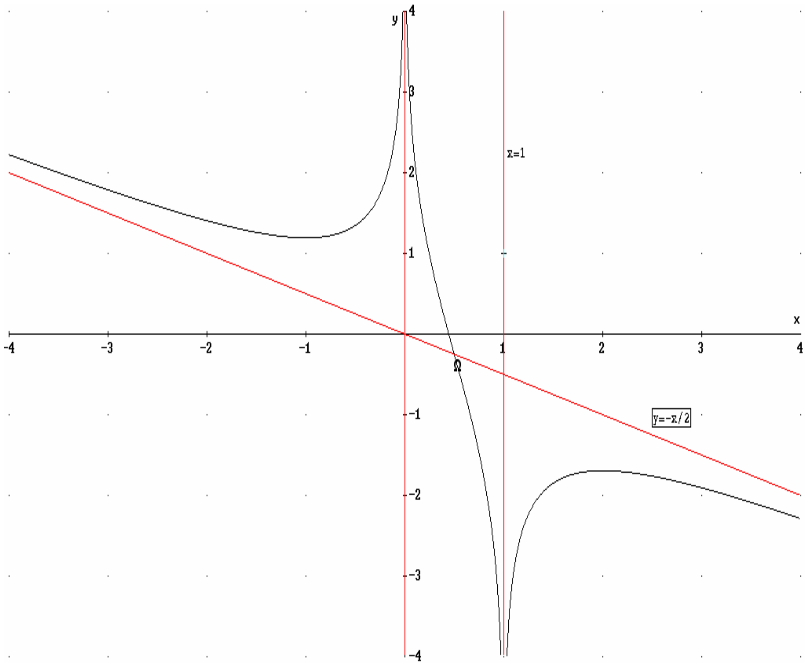
تمرين21:

1- أ- $D=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2- لكل x من D فإن $-x\in D$ و لدينا $f(1-x)+f(x)=\dfrac{1}{2}$

3- ب- $y=\dfrac{-x}{2}$ مقارب مائل لـ(C) بجوار $+\infty$

4- $$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{x(x-1)} & ;x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right[\\ f'(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)} & ;x\in\left]1\,;+\infty\right[\end{cases}$$



7- ب- $A = \int_2^3 -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx = \int_2^3 \ln x - \ln(x+1)\ dx = \ln\left(\frac{27}{16}\right)\ cm^2$

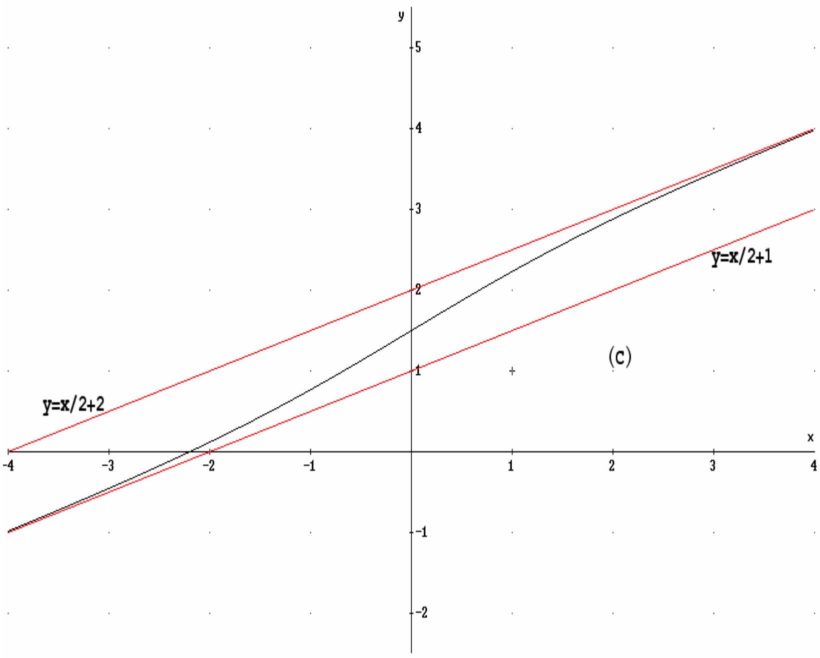
تمرين22:

1- أ- لكل x من IR $f(-x) + f(x) = 3$

4- $A = \int_0^{\ln 2} f(x)dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\ cm^2$

5- يمكن اعتبار الدالة $f(x) - x$ x على المجال $[3,4]$.

6- ج- $\lim u_n = \alpha$



تمرين23:

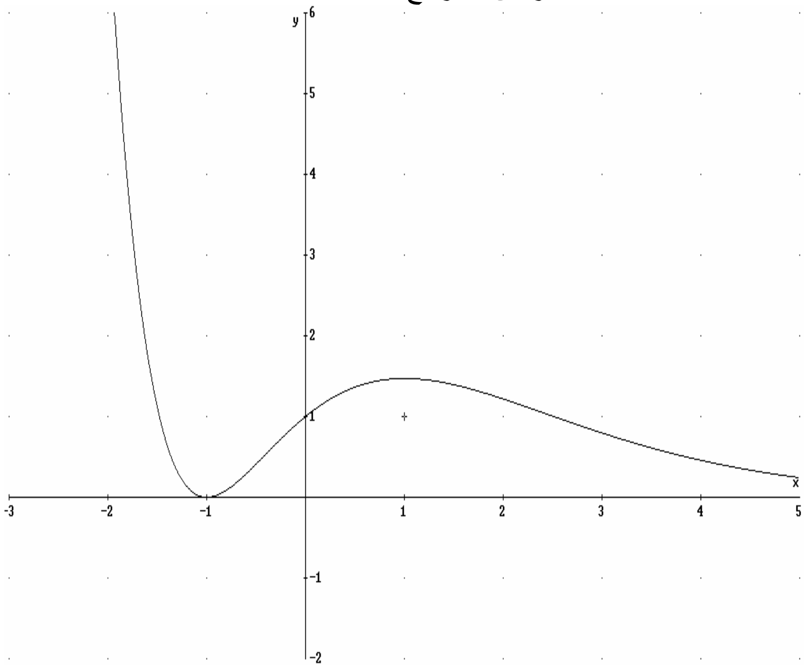
الجزء الأول:

2- أ- : $f'(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x} \quad ; \quad x\in IR$

الجزء الثاني:

1- ب-: g g تزايدية قطعا على I.

2- أ – ب-: استعمل البرهان بالترجع.

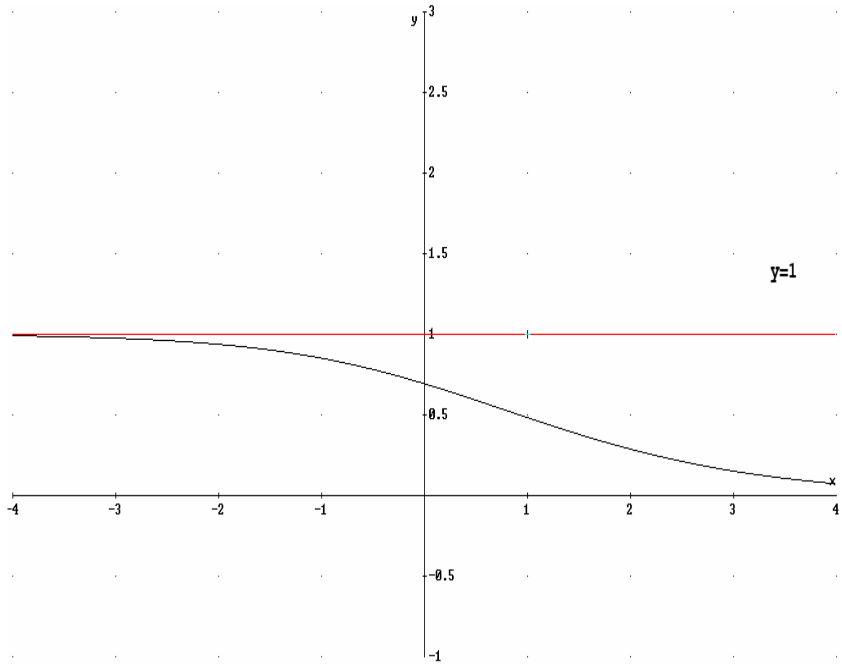


تمرين24:

-1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

-2 أ- $\forall x\in IR_+^* \quad : \quad h(x)\leq 0$

-4 أ- $\int_0^1 f(x)dx = 2\ln 2+1-\frac{(1+e)\ln(1+e)}{e}$



تمرين25:

1 – ب - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, y=-1 معادلة المقارب الأفقي بجوار ∞ - .

2 – $f'(x) = \dfrac{9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$; $x \in IR$

3 – أ – A(-(ln2)/3 ,0)

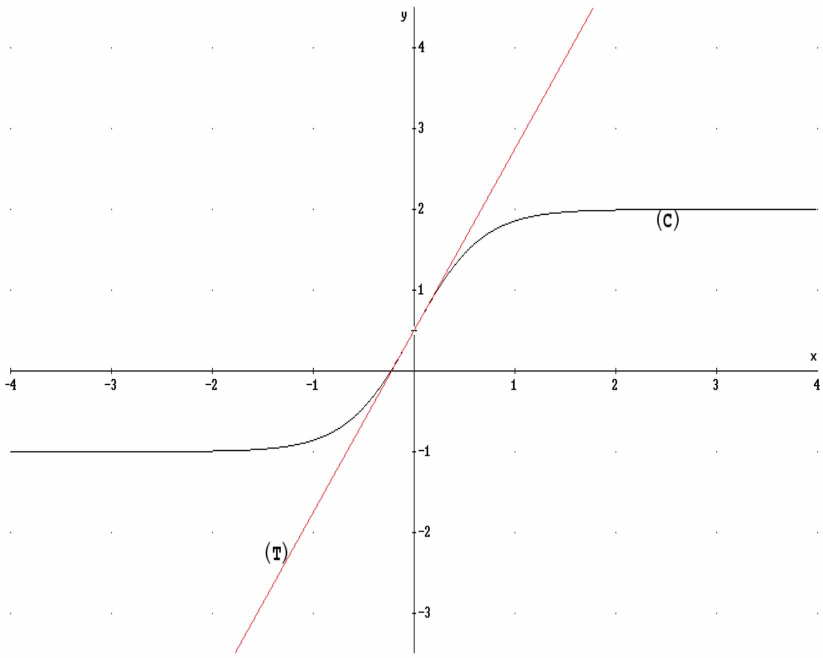
- ب - معادلة المماس في النقطة Ω : y=(9/4)x+1/2

4 – ج- $A = -\dfrac{1}{3}\ln(\dfrac{27}{32})\,cm^2$

6 – ب – (u_n) تزايدية قطعا بما أن x $f(x)$ على المجال $[2ln2,\alpha[$

$\lim u_n = \alpha$ حيث α حل المعادلة $f(x)=x$

7 – n = 4 و $\alpha \cong 1.992$



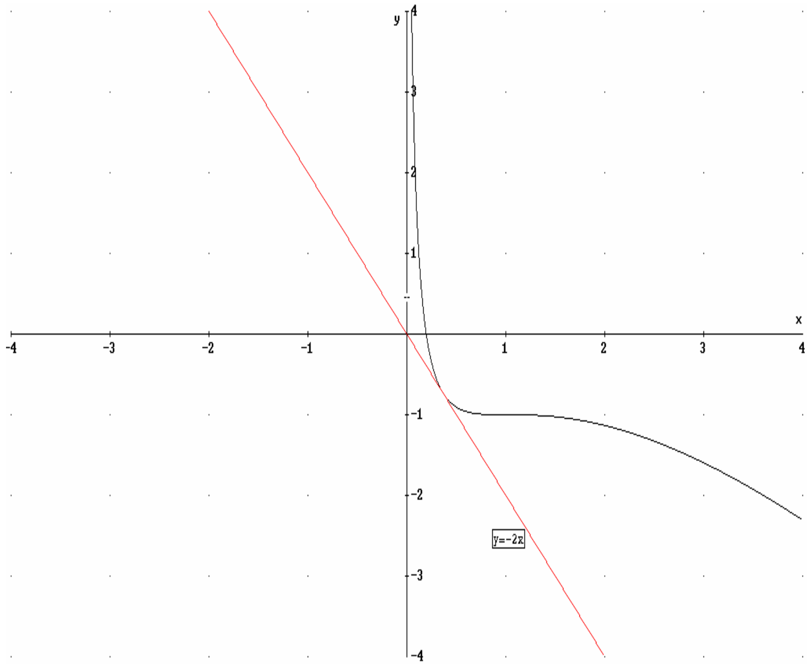
تمرين26:

1 ـ أ ـ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $x=0$ معادلة المقارب العمودي بجوار .

ج - $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=+\infty$

3 ـ أ ـ $(T) : y=2(1-2\ln 2)x-1+(\ln 2)^2$

ب - $f''(x)=-\dfrac{2\ln x}{x^2}$ إذن $I(1,-1)$ نقطة انعطاف



تمرين27:

-1 f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0=0$. و لدينا $f'_g(0)=0$

-2 ب- $x=0$ مقارب عمودي و $y=x+1$ مقارب مائل لـــ (C).

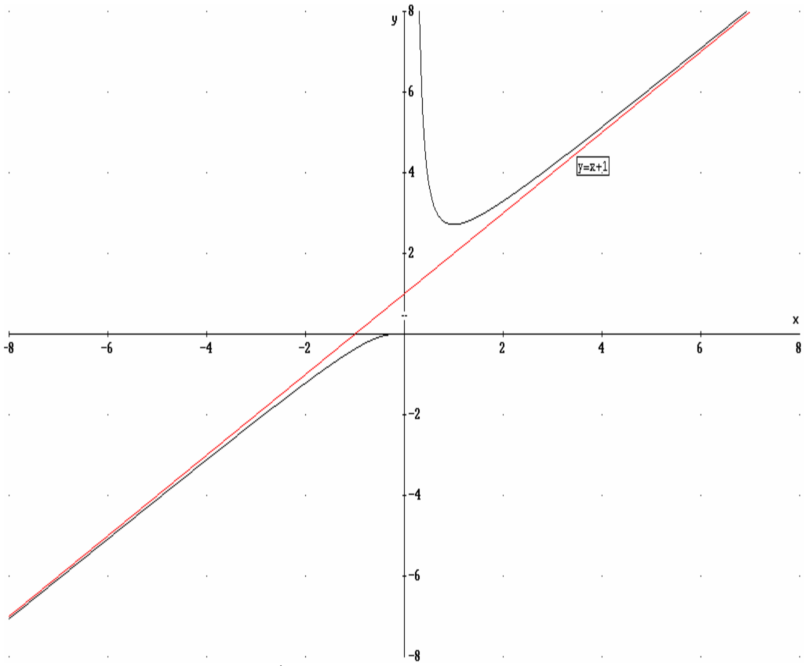
-3 $\forall x\in IR^* \quad : \quad f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

-4 ج- $\forall x\in IR^* \quad ; \quad f(x)-f(x+1)=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\dfrac{1}{x}\right)$

إشارة $f(x)-(x+1)$ هي إشارة x

(C) فوق المستقيم $y=x+1$ على $]0,+\infty[$

(C) تحت المستقيم $y=x+1$ على $]-\infty,0[$



5- أ- $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المحصور بين (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=\lambda$ و $x=1$.

د- $\forall t\in\left[1,\frac{1}{\lambda}\right]:\lambda^3 \quad \frac{1}{t^3} \quad 1$ وباستعمال التكامل من 1 إلى $\frac{1}{\lambda}$ نحصل على :

$e^{\frac{1}{\lambda}}-1 \quad A(\lambda) \quad e^{\frac{1+3\lambda\ln\lambda}{\lambda}}$ وذلك لأن $\lambda^3 e^{\frac{1}{\lambda}} = e^{\frac{3\lambda\ln\lambda+1}{\lambda}}$

تمرين28:

1 – ب – $f(-4-x)=-f(x)$

ج - $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

2 – $f'(x)=-[\ln((x+2)^2+1)+\frac{2(x+2)^2}{(x+2)^2+1}]<0$

3 – أ – $f''(x)=\frac{-2(x+2)((x+2)^2+3)}{[(x+2)^2+1]^2}$ إذن (-2,0) Ω نقطة انعطاف

4 – $g'(x)=-f(-x)>0$ g تزايدية قطعا على IR

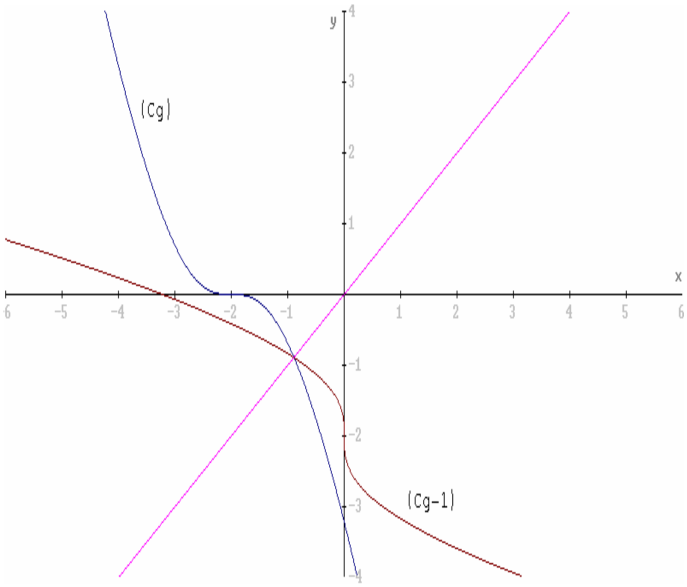
g متصلة و g(4)-4<0 و g(5)-5>0

إذن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حل وحيد α مع $5 \quad \alpha \quad 4$

5 – أ - البرهان بالترجع مع $g^{-1}(\alpha)=\alpha$

ب – $x \quad g^{-1}(x) \quad \forall x\in[0,\alpha[$ (مبيانيا) إذن (u_n) تزايدية قطعا

ج – $\lim u_n=\alpha$ α= -0,89



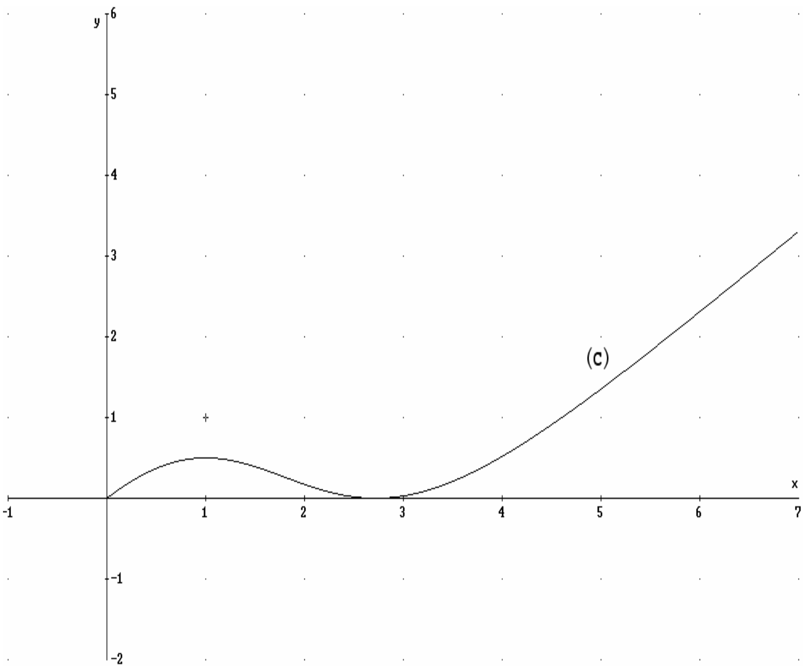
تمرين29:

1- أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- ج - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$

2- ب-   إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(\ln x)^2 - \ln x$. و لدينا f' تنعدم في $x=1$ و $x=e$

3- ب- $f(e)=0$



4- ب- g^{-1} غير قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$ و $(C_{g^{-1}})$ يقبل نصف مماس عمودي في النقطة $\begin{pmatrix}0\\e\end{pmatrix}$.

5- أ- h غير قابلة للاشتقاق في $x=0$ و $x=e$.

- ب- h تزايدية على $]0,1[$ (مركب دالتين تزايديتين)
h تناقصية على $]1,e[$ (مركب دالتين: g^{-1} تزايدية وf تناقصية)

تمرين30:

1- أ- النقطة $I\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ مركز تماثل لـــــ (C) .

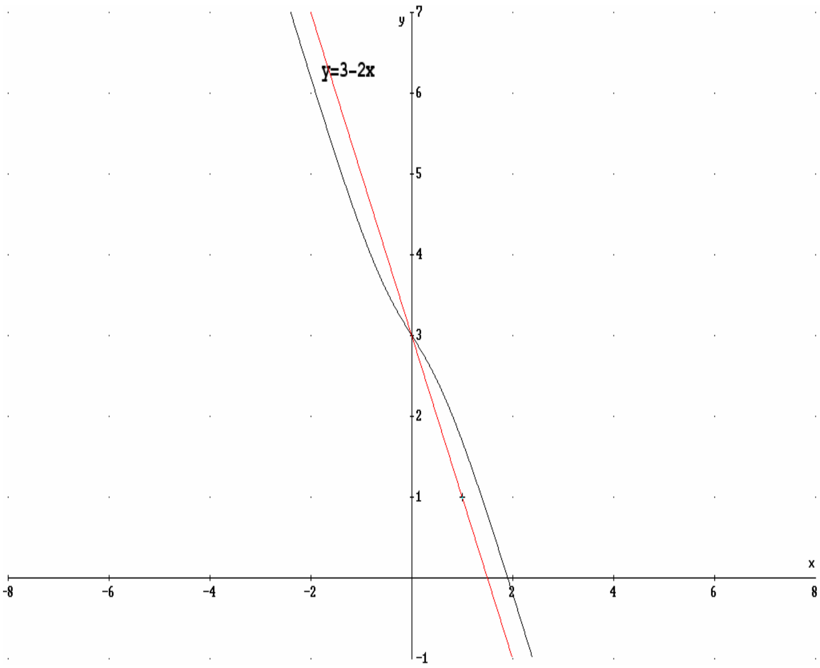
- ب- $f'(0)=-2$

2- أ- $f'(x)=\dfrac{-2x^2}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right)$

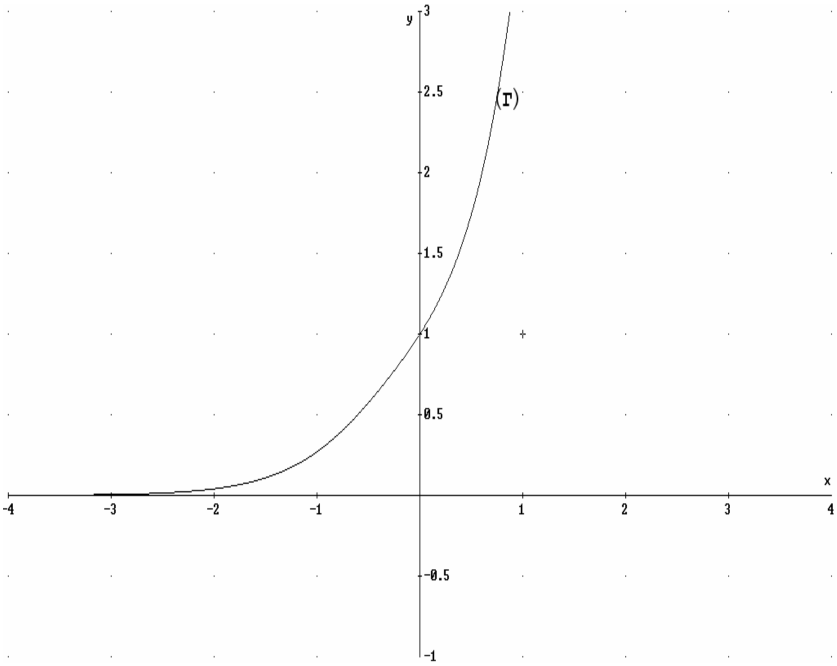
3- ب- معادلة المماس في $x_0=0$ هي : y=3-2x

و لدينا :
$\forall x\in IR_+^*\quad ;\ f(x)-(3-2x)\quad 0$
$\forall x\in IR_-^*\quad .\ f(x)-(3-2x)\quad 0$

إذن : $I\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ نقطة انعطاف .



4 - أ- $g(x)=e^{3-f(x)}\qquad(\forall x\in\quad)$
- ب- g تزايدية قطعا على IR.
- ج-



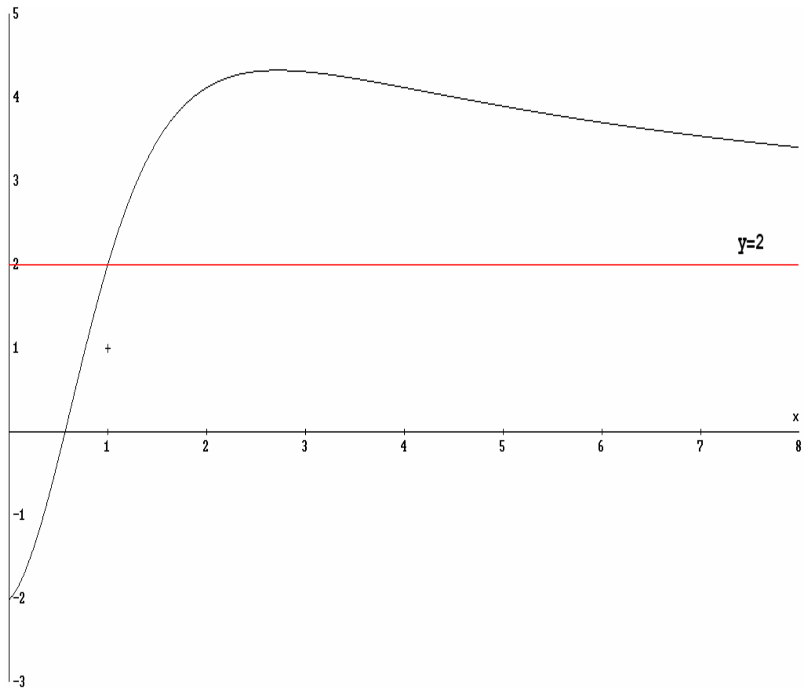
تمرين31:

2- أ-
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$$

3- أ- $f_d'(0) = 0$

4- ب- g تناقصية على $[e;+\infty[$ إذن $(u_n)_{n\geq 2}$ تناقصية $\forall n \geq 2 : 1 \leq u_n \leq \frac{1}{2}g(e)$

-ج- $\lim u_n = 1$



تمرين32:

1- أ- : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1$

3- ب-: $f'(x) = -\frac{\ln^2(x)}{(2+\ln x)^2}$

4- أ- : $\forall x \in D \quad f''(x) = \frac{-4\ln x}{x(2+\ln x)^2}$

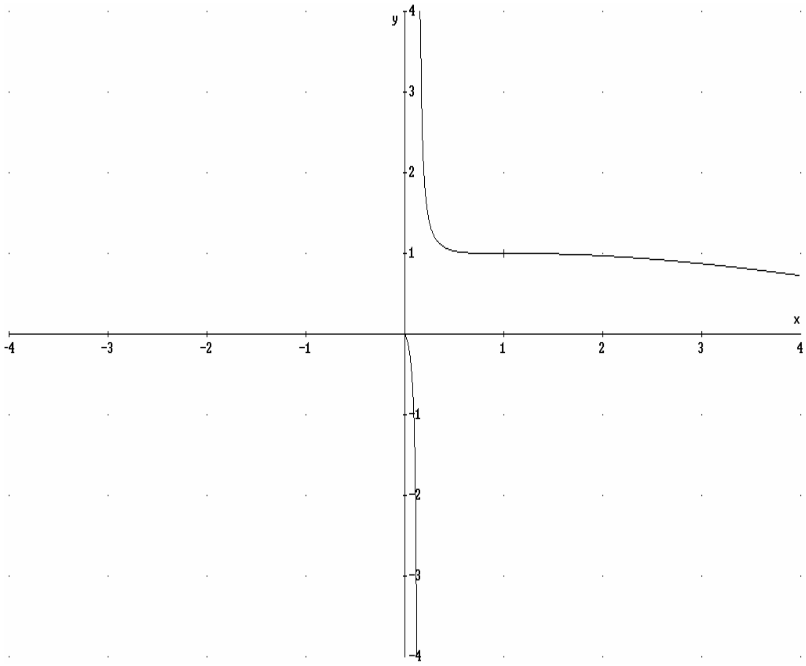
- ب- $x = e^2$ أو $x = 0$

5- ب- $x_0 = e^2$ و $x_1 = 1$

6- أ- f تناقصية قطعا على $\left]\frac{1}{e^2}, +\infty\right[$

- ب- $(x_n)_n$ تناقصية قطعا و مصغورة

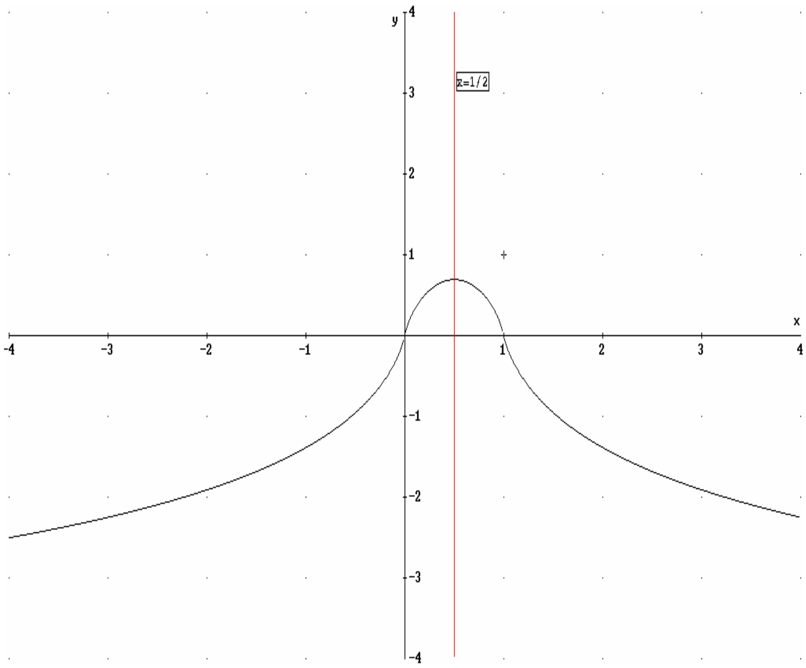
- ت- $\lim_{n\to+\infty} x_n = e^{-2}$



تمرين33:

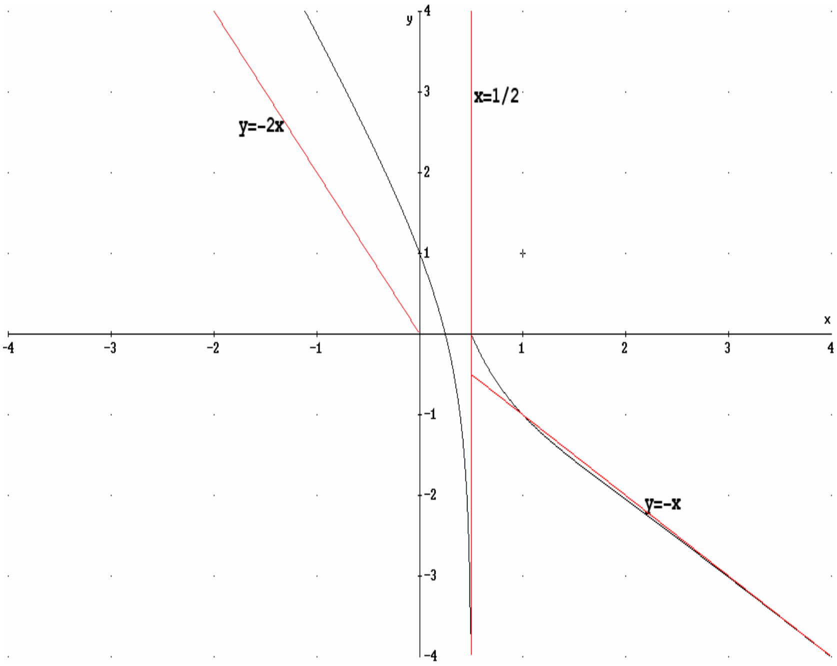
-2أ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=-1$

-3أ $\forall x\in\ ^{*}-\{1\}\qquad f'(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$



تمرين34:

$\forall x\in IR\qquad g'(x)\le g'(2)\quad 0$



تمرين35:

1- ب-: $u'(x)=\dfrac{6\left(x+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)\Phi(x)}{x}$ مع $0 \quad \Phi(x) \quad 0 \quad \forall x$

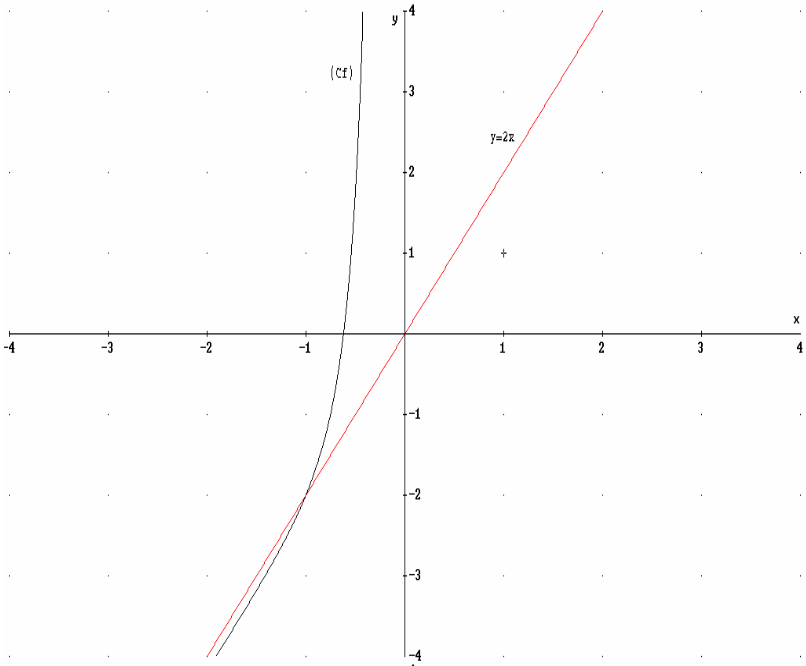
3- أ-: $f(x)-2x=-\dfrac{\ln(-x)}{x^2}$

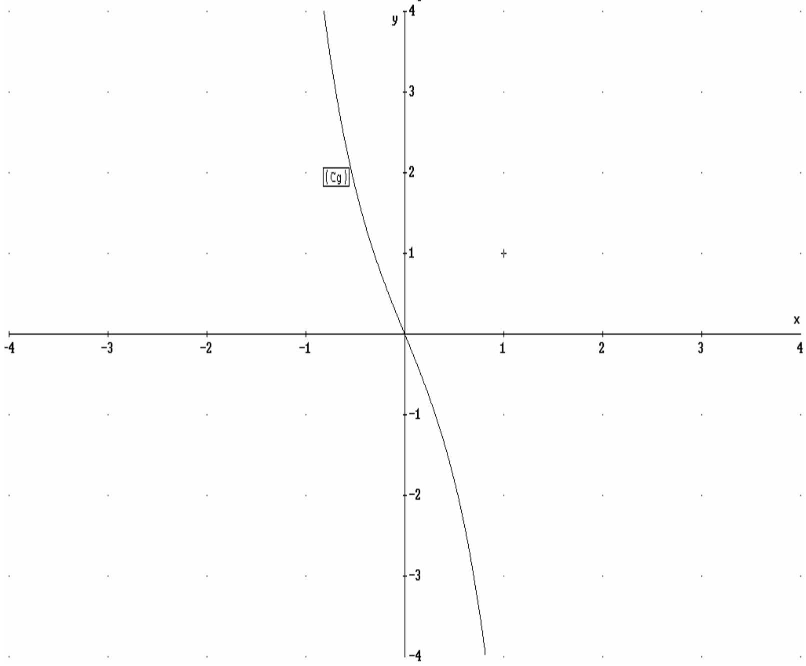
- ب-: $f''(x)=\dfrac{5-6\ln(-x)}{x^2} \quad 0 \quad \forall x$ $x_0=-e^{\frac{5}{6}}$ هو أفصول نقطة الانعطاف.

4- ب-: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=-\infty$

- ت-: $g'(x)=-\left(e^{x}+e^{-x}\right)+x\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)$ و لدينا : $\forall x\geq 0 \ : g'(x)\leq 0$

5- لاحظ أن: $g(x)=-\dfrac{1}{2}m$

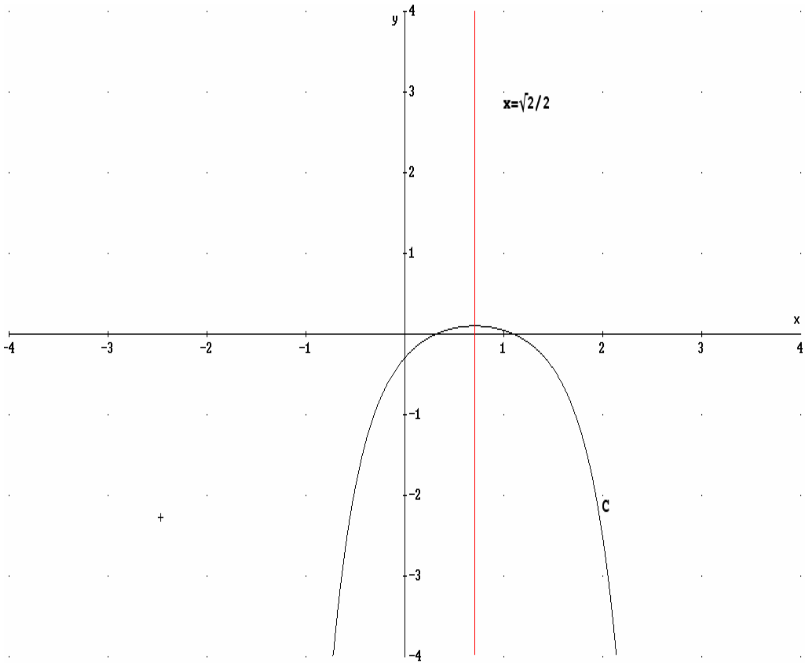




تمرين36:

الجزء الأول:

2- أ- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



الجزء الثاني:

1- ب- Ca و C-a متماثلان بالنسبة لـــ (Ox)

2- أ- $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)-x+a=0$ ، إذن المستقيم $y=x-a$ مقارب لـــ(C_a) بجوار $+\infty$.

- ت- $\forall x \quad a \quad f_a'(x)=1+2(x-a)e^{2ax-x^2} \quad 0$

3- أ- $\forall x\ge b \quad f_a(x)-f_b(x)=(b-a)+e^{2bx-x^2}-e^{2ax-x^2}$

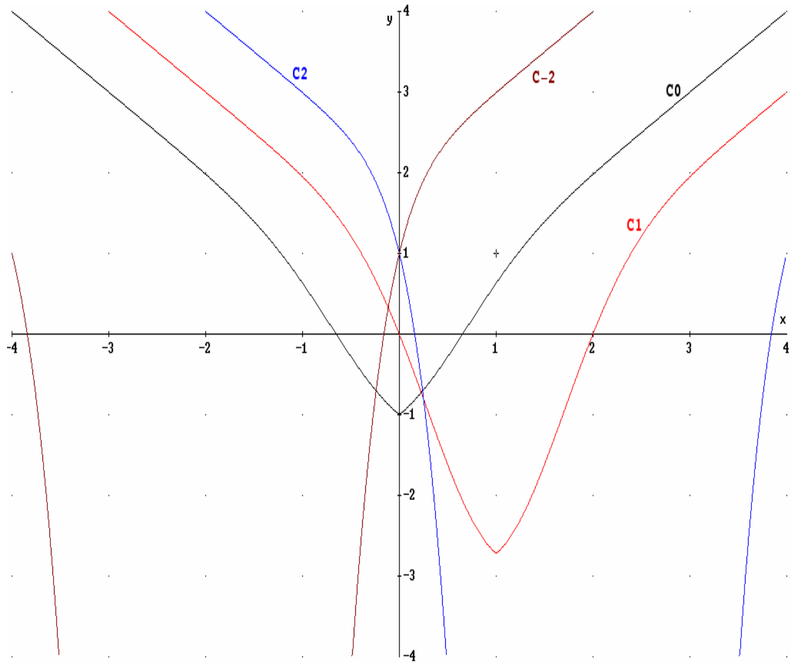
إذا كان 0 x فإن $xy+c$ y تزايدية قطعا ، ومنه :بما أن $b\ge a$ فإن $2bx-x^2\ge 2ax-x^2$

إذن $(b-a)+e^{2bx-x^2}-e^{2ax-x^2}\ge 0$ و بالتالي (C_a) فوق (C_b).

- ب- $f''(x)=4\left(x-a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-a+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{2ax-x^2}$

4- ب- $a\le b$ فإن إذا كان $x\ge b$ لنا $f_a(x)\ge f_b(x)$ يستلزم $f_a(x_b)\ge 0$ $(f_b(x_b)=0)$

و $f_a(x_a)=0$ يستلزم $x_a\le x_b$ (f_a تزايدية على $[a,+\infty[$) يستلزم x_a x تزايدية .

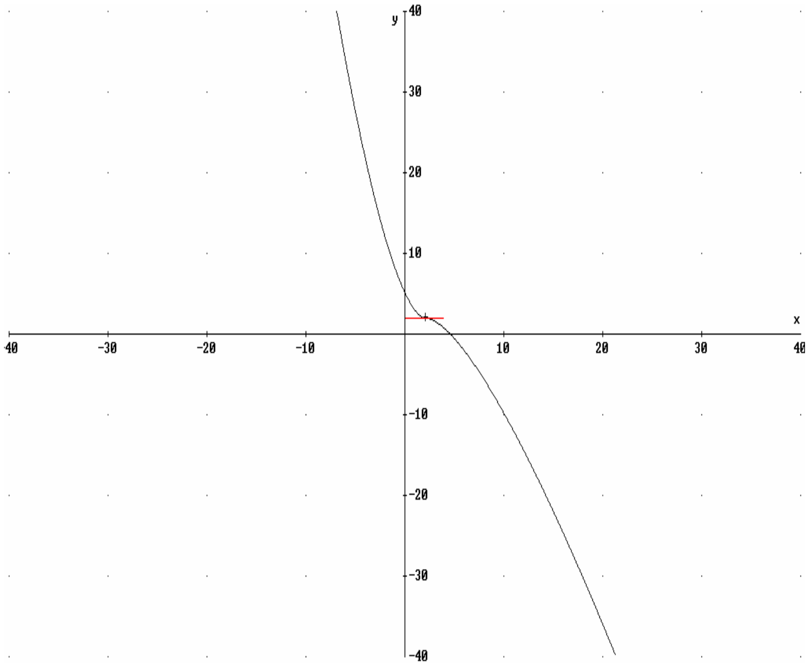


تمرين37:

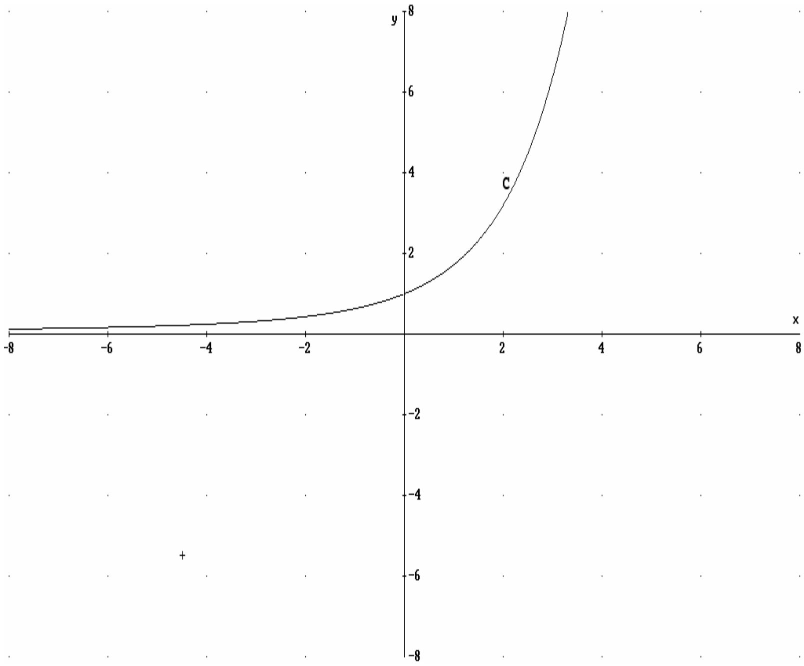
2- ب- : ادرس وضع(C) بالنسبة للماس في النقطة I.

4- أ- ب- : بالترجع و f f تزايدية قطعا على IR .

- ت- : $\lim u_n = 2$



تمرين38:

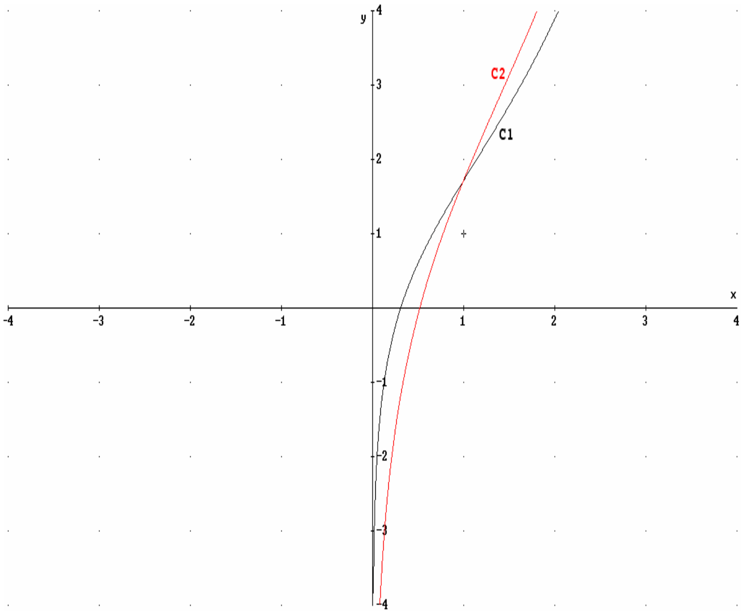


2- ب- $A\begin{pmatrix}1\\e-1\end{pmatrix}$

3- أ- f_n تقابل من $]0;1[$ نحو $]-\infty;e-1[$

- ب- $\forall n \in IN \quad \begin{cases} 0 \quad x_n \quad 1 \\ g(x_n) = -n\lim x_n \\ g(x_n) \quad g(1) \end{cases}$

- ت- لاحظ أن : $\begin{cases} 0 \quad x_n \quad 1 \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n(x_n) = 0 \end{cases} \quad \forall n \in IN$ و استعمل : 2- ت-



تمرين 39:

الجزء الأول:

2- ب- : الدالتان $u : x \quad e^{4(3+x-3\sqrt{1+x})}$ و $v : \quad 1+2\ln(1-x)$ قابلتان للاشتقاق في الصفر

و لدينا $\begin{cases} f'_d(0) = u'(0) = -2 \\ f'_g(0) = v'(0) = -2 \end{cases}$

-3 لدينا $\begin{cases} \ln x \leq x-1 & ;x \quad 0 \\ e^x \geq x+1 & ;x \in IR \end{cases}$

و منه $\begin{cases} x \quad 0 & : f(x)+2x-1 = 2(x+\ln(x-1)) \quad 0 \\ x \quad 0 & : f(x)+2x-1 = 6\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \quad 0 \end{cases}$

الجزء الثاني:

1- أ – ب- بالترجع

2- ب-- $\lim u_n = 8$