قابلية الاشتقاق

I – قابلية الإشتقاق في نقطة :

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 . إذا كان : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 ؛ والعدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 ويرمز له بالرمز $f'(x_0)$ أو $\frac{df}{dx}(x_0)$ ؛ ونكتب $\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ ولدينا أيضا : $\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$ وذلك بوضع : $h = x - x_0$ ، $\underset{x \to x_0}{h \to 0}$.

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال $[x_0, x_0+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$. إذا كان : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة x_0 ؛ والعدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق على اليمين للدالة f في النقطة x_0 ويرمز له بالرمز $f'_d(x_0)$ ونكتب: $\boxed{f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال $]x_0-\alpha, x_0]$ حيث $\alpha > 0$. إذا كان : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة x_0 ؛ والعدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق على اليسار للدالة f في النقطة x_0 ويرمز له بالرمز $f'_g(x_0)$ ونكتب : $\boxed{f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0. تكون f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0؛ إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في النقطة x_0 وكان $\boxed{f'_g(x_0) = f'_d(x_0)}$. وفي هذه الحالة يكون لدينا : $\boxed{f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)}$

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0. إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 ؛ فإنها تكون متصلة في النقطة x_0 .

! (الاستلزام المضاد للعكس ليس صحيحا)

II- التأويل الهندسي للعدد المشتق – الدالة التآلفية المماسة :

✓ لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 . الدالة التآلفية u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{u : x \mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ تسمى **الدالة التآلفية المماسة** للدالة f عند النقطة x_0. ولدينا : $f(x) \approx u(x)$ كلما كان $x \approx x_0$.

✓ لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 ؛ و$(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (T) ذو المعادلة: $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ يسمى **المماس** للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة التي أفصولها x_0 .

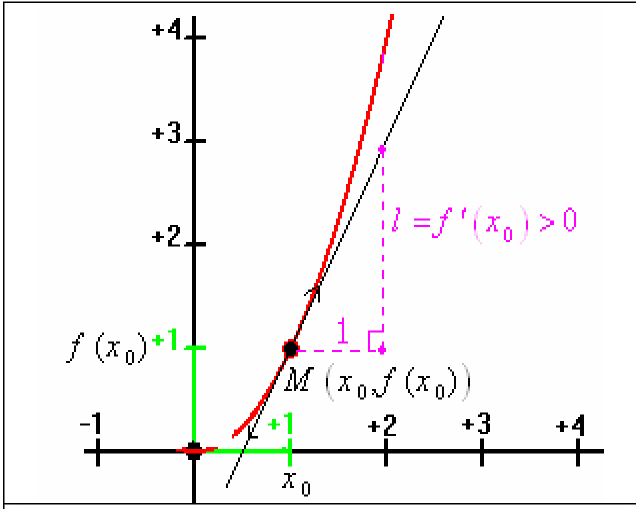
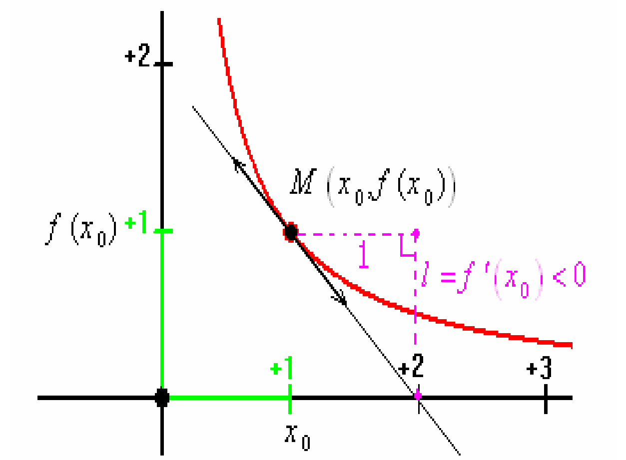
((T) هو المستقيم المار من النقطة $M(x_0, f(x_0))$ والذي **معامله الموجه** هو $f'(x_0)$)

✓ لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في نقطة x_0 ؛ و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نصف المستقيم (T_d) ذو المعادلة: $\boxed{(T_d):\begin{cases} y = f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}}$ يسمى نصف المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة التي أفصولها x_0 .

✓ لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على اليسار في نقطة x_0 ؛ و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نصف المستقيم (T_g) ذو المعادلة : $\boxed{(T_g):\begin{cases} y = f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}}$ يسمى نصف المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة التي أفصولها x_0.

❖ المماسات :

f قابلة للاشتقاق في x_0 و $\boxed{f'(x_0) = l \in \mathbb{R}}$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l > 0$	$(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا في النقطة التي أفصولها x_0 ؛ معادلته : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l < 0$	$(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا في النقطة التي أفصولها x_0 ؛ معادلته : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	

مثال :

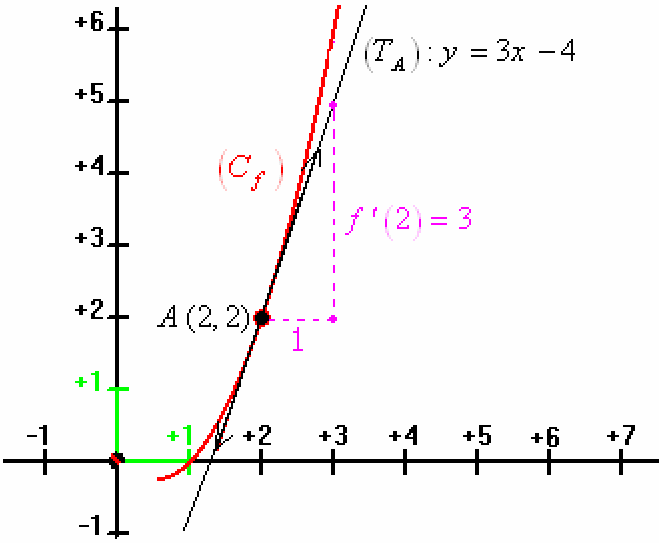
$f(x) = x^2 - x$ ، $x_0 = 2$.

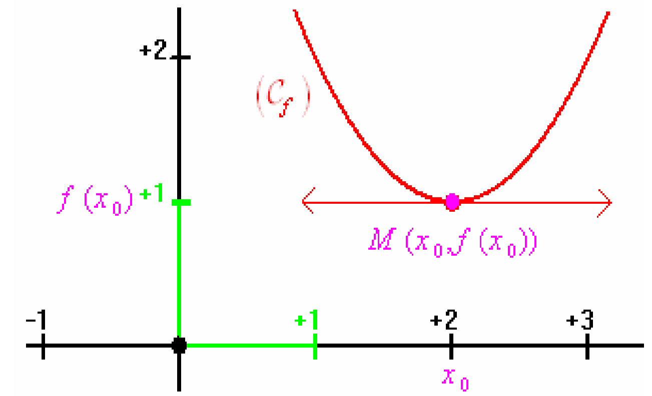
لدينا : $f(2) = 2$ و $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 3$ ؛ إذن : f قابلة للاشتقاق في النقطة 2 و $\boxed{f'(2) = 3}$.

ومنه فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا في النقطة التي أفصولها 2 معادلته :

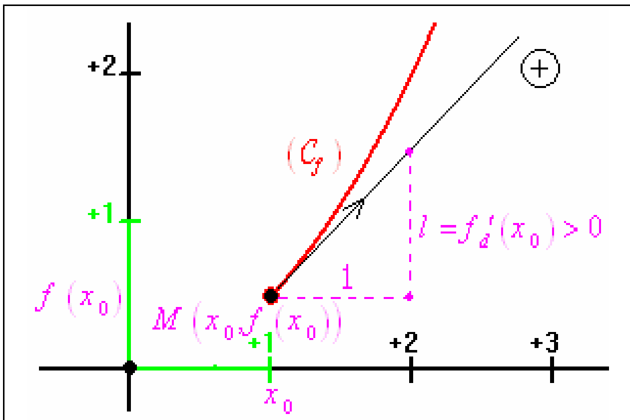
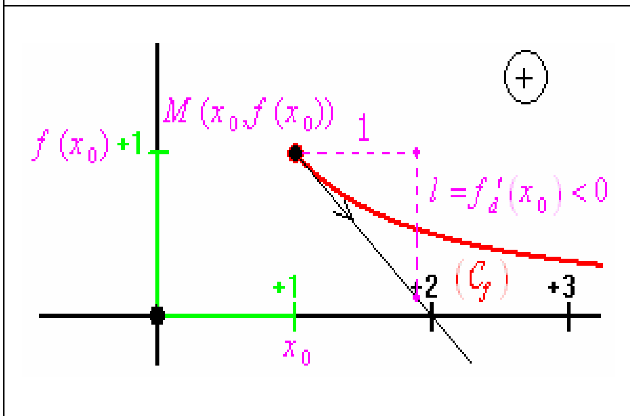
$$y = f'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y = 3(x-2)+2$$

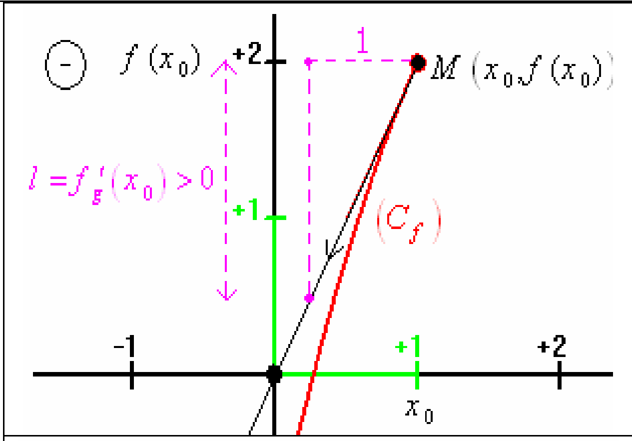
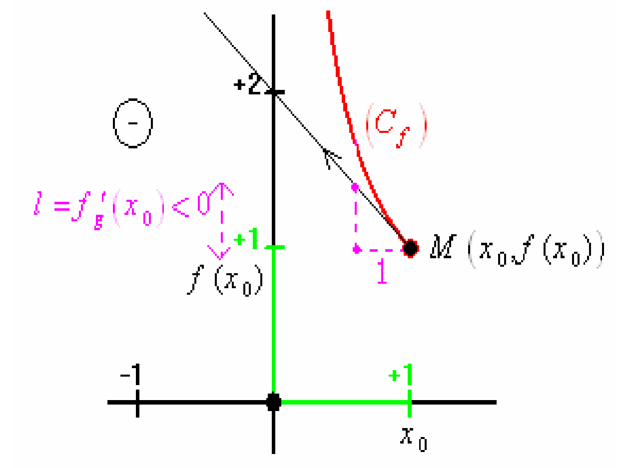
$$\Leftrightarrow \boxed{y = 3x - 4}$$



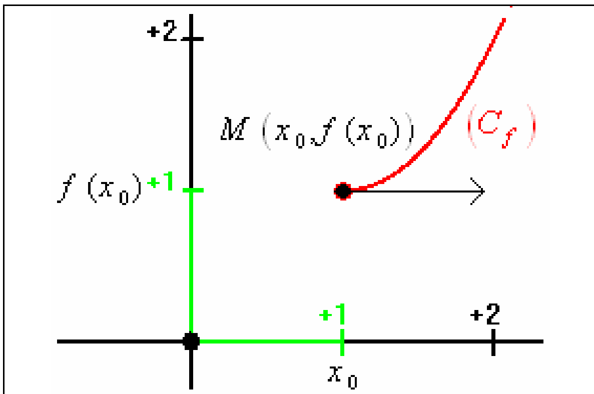
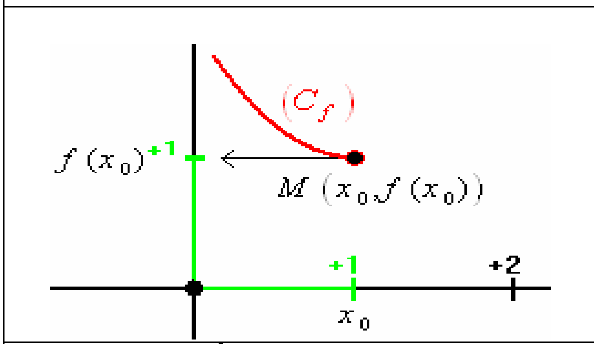
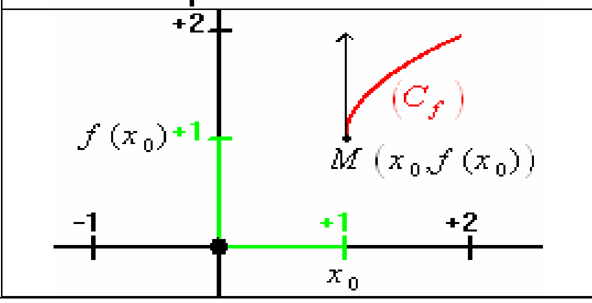
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$	f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 (C_f) يقبل مماسا في النقطة التي أفصولها x_0 <u>موازٍ لمحور الأفاصيل</u> معادلته : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $\Leftrightarrow \boxed{y = f(x_0)}$	

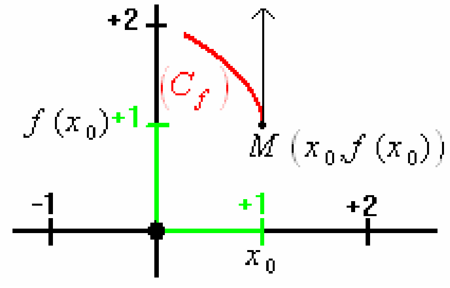
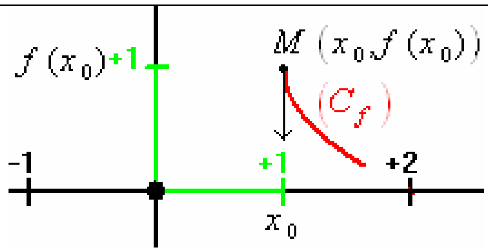
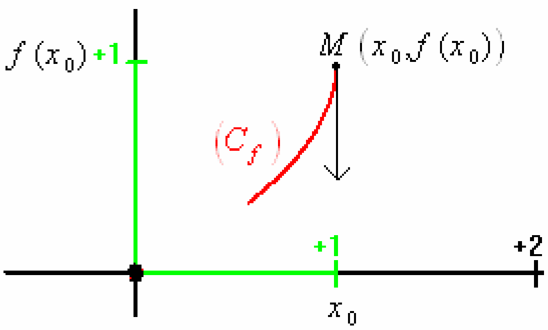
❖ <u>أنصاف المماسات :</u>

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l > 0$	f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة x_0 و $\boxed{f_d'(x_0) = l}$ (C_f) يقبل نصف مماس في النقطةالتي أفصولها x_0 معادلته: $\boxed{\begin{cases} y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}}$	
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l < 0$	f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة x_0 و $\boxed{f_d'(x_0) = l}$ (C_f) يقبل نصف مماس في النقطةالتي أفصولها x_0 معادلته: $\boxed{\begin{cases} y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}}$	

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l > 0$	f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة x_0 و $\boxed{f_g'(x_0)=l}$ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس في النقطةالتي أفصولها x_0 معادلته: $\boxed{\begin{cases} y = f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \le x_0 \end{cases}}$	
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l < 0$	f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة x_0 و $\boxed{f_g'(x_0)=l}$ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس في النقطةالتي أفصولها x_0 معادلته: $\boxed{\begin{cases} y = f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \le x_0 \end{cases}}$	

❖ **<u>حالات خاصة :</u>**

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	f قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة x_0 و $\boxed{f_d'(x_0)=0}$ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس في النقطة التي أفصولها x_0 معادلته: $\boxed{\begin{cases} y = f(x_0) \\ x \ge x_0 \end{cases}}$	
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	f قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة x_0 و $\boxed{f_g'(x_0)=0}$ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس في النقطة التي أفصولها x_0 معادلته: $\boxed{\begin{cases} y = f(x_0) \\ x \le x_0 \end{cases}}$	
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$	f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة x_0 $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسي؛ موجه نحو الأعلى؛ في النقطة التي أفصولها x_0.	

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	غير قابلة للإشتقاق على f اليسار في النقطة x_0 يقبل نصف مماس رأسي؛ (C_f) موجه نحو الأعلى؛ في النقطة التي أفصولها x_0.	
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	غير قابلة للإشتقاق على f اليمين في النقطة x_0 يقبل نصف مماس رأسي؛ (C_f) موجه نحو الأسفل؛ في النقطة التي أفصولها x_0.	
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$	غير قابلة للإشتقاق على f اليسار في النقطة x_0 يقبل نصف مماس رأسي؛ (C_f) موجه نحو الأسفل؛ في النقطة التي أفصولها x_0.	

III- قابلية الإشتقاق على مجال :

$a < b$

- ✓ تكون f قابلة للاشتقاق على مجال $]a,b[$ ؛ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال $]a,b[$.
- ✓ تكون f قابلة للاشتقاق على مجال $[a,b[$ ؛ إذا كانت قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وعلى اليمين في النقطة a.
- ✓ تكون f قابلة للاشتقاق على مجال $]a,b]$ ؛ إذا كانت قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وعلى اليسار في النقطة b.
- ✓ تكون f قابلة للاشتقاق على مجال $[a,b]$ ؛ إذا كانت قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وعلى اليمين في النقطة a وعلى اليسار في النقطة b.
- ✓ كل دالة حدودية تكون قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- ✓ كل دالة جذرية تكون قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها .
- ✓ الدالتان $\sin : x \mapsto \sin(x)$ و $\cos : x \mapsto \cos(x)$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- ✓ الدالة $\tan : x \mapsto \tan(x)$ قابلة للاشتقاق على المجالات $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

IV- العمليات على الدوال المشتقة :

- ✓ لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$. الدوال $f+g$ و $f-g$ و $f \times g$ و $\alpha f + \beta g$ و αf هي دوال قابلة للاشتقاق على المجال I .
- ✓ لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح I حيث $\forall x \in I : g(x) \neq 0$. الدالتين $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ هما دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I .
- ✓ إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I وكان $\forall x \in I : f(x) > 0$ ؛ فإن $\sqrt{f} : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ تكون دالة قابلة للاشتقاق على المجال I . ولدينا :

$$\forall x \in I : \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

قواعد الحساب : أنظر الجدول الملحق للدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية .

V- المشتقة الثانية :

✓ لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . الدالة التي تربط كل عنصر x من المجال I بالعدد الحقيقي $f'(x)$ ؛ تسمى الدالة المشتقة الأولى للدالة f على المجال I ؛ ونرمز لها بالرمز f' ونكتب:

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

✓ لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I . الدالة التي تربط كل عنصر x من المجال I بالعدد الحقيقي $(f')'(x)$ ؛ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f على المجال I ؛ ونرمز لها بالرمز f''

ونكتب : $f'' : x \mapsto f''(x) = (f')'(x)$

تطبيقات للدالة المشتقة

I- تغيرات دالة عددية :

✓ لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

➢ [f تزايدية على المجال I] $\Leftrightarrow$ $[\forall x \in I : f'(x) \geq 0]$.

➢ [f تناقصية على المجال I] $\Leftrightarrow$ $[\forall x \in I : f'(x) \leq 0]$.

✓ لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

➢ [f تزايدية قطعا على المجال I] $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I : f'(x) > 0$ ، (قد تكون f' منعدمة في عدد منته من نقط I)]

➢ [f تناقصية قطعا على المجال I] $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I : f'(x) < 0$ ، (قد تكون f' منعدمة في عدد منته من نقط I)]

II- مطاريف دالة عددية :

✓ لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها ؛ وليكن $x_0 \in D_f$.

➢ نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة القصوى المطلقة للدالة f عند العدد x_0 (أو أقصى الدالة f) ؛ إذا تحقق ما يلي: $\boxed{\forall x \in D_f \quad : \quad f(x) \leq f(x_0)}$ ونكتب : $\boxed{f(x_0) = \underset{x \in D_f}{Max}\, f(x)}$

➢ نقول إن العدد $f(x_0)$ هو قيمة قصوى نسبية للدالة f عند العدد x_0 ؛(أو أقصى نسبي للدالة f) ؛ إذا وجد مجال مفتوح I مركزه x_0 بحيث : $\boxed{\forall x \in I \quad : \quad f(x) \leq f(x_0)}$.ونكتب: $\boxed{f(x_0) = \underset{x \in I}{Max}\, f(x)}$

✓ لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها ؛ وليكن $x_0 \in D_f$.

➢ نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة الدنا المطلقة للدالة f عند العدد x_0 (أو أدنى الدالة f) ؛ إذا تحقق ما يلي: $\boxed{\forall x \in D_f \quad : \quad f(x_0) \leq f(x)}$. ونكتب : $\boxed{f(x_0) = \underset{x \in D_f}{Min}\, f(x)}$

➢ نقول إن العدد $f(x_0)$ هو قيمة دنيا نسبية للدالة f عند العدد x_0 ؛(أو أدنى نسبي للدالة f) ؛ إذا وجد مجال مفتوح I مركزه x_0 بحيث: $\boxed{\forall x \in I \quad : \quad f(x_0) \leq f(x)}$.ونكتب: $\boxed{f(x_0) = \underset{x \in I}{Min}\, f(x)}$

✓ إذا كانت $f(x_0)$ قيمة دنيا أو قصوى أو ... فإننا نقول إن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ مطراف للدالة f .

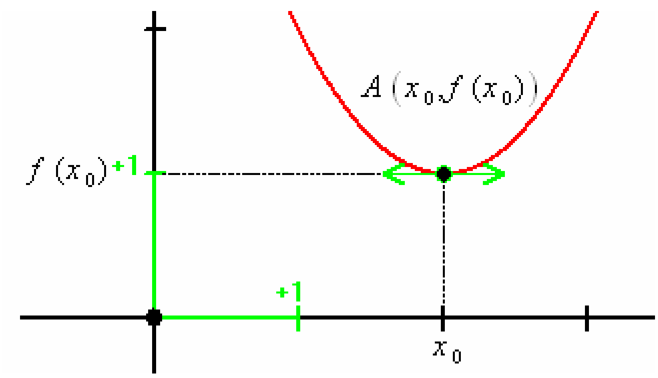
✓ لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح مركزه x_0 . إذا كانت f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها بجوار x_0 ؛ فإن النقطة $M(x_0,f(x_0))$ مطراف للدالة f .

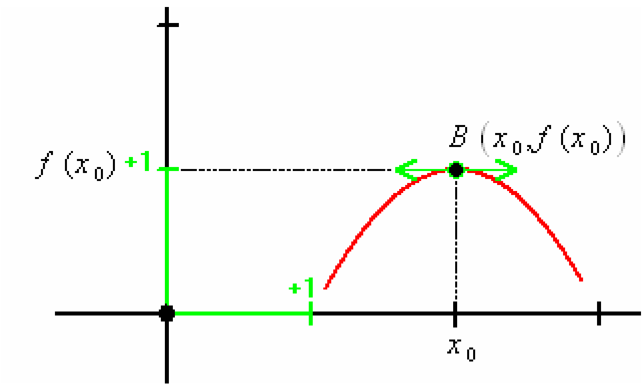
x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

$f(x_0)$ هي قيمة دنيا للدالة f عند العدد x_0

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$f(x_0)$ هي قيمة قصوى للدالة f عند العدد x_0



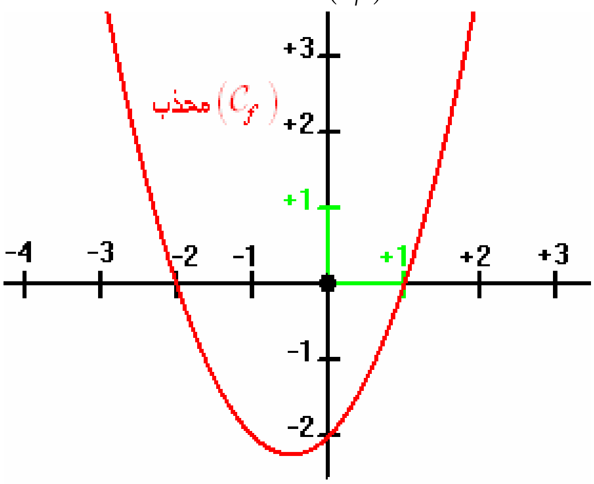


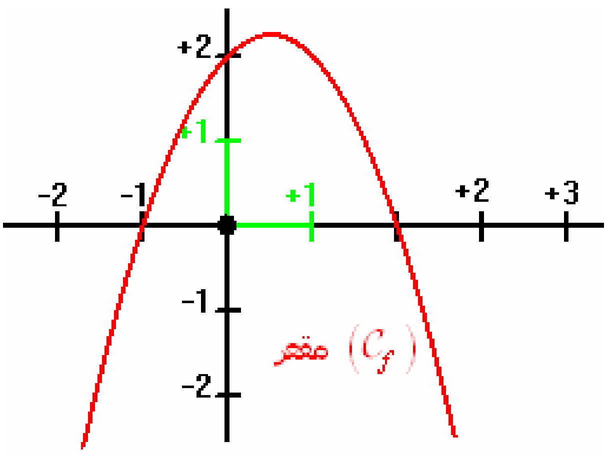
III- التقعر ونقط الانعطاف :

✓ دراسة التقعر :

➢ نقول إن منحنى $(\mathcal{C}_f)$ **محدب** ؛ إذا كان يوجد فوق جميع مماساته .

➢ نقول إن منحنى $(\mathcal{C}_f)$ **مقعر** ؛ إذا كان يوجد تحت جميع مماساته .





➢ لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I .

- إذا كان $\boxed{\forall x \in I : f''(x) \geq 0}$ ؛ فإن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ محدب .
- إذا كان $\boxed{\forall x \in I : f''(x) \leq 0}$ ؛ فإن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ مقعر .

x	مجال
$f''(x)$	+
تقعر (C_f)	محدب

x	مجال
$f''(x)$	-
تقعر (C_f)	مقعر

✓ نقول إن نقطة $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ ، **نقطة انعطاف** لمنحنى (C_f)؛ إذا كان (C_f) يغير تقعره بجوار النقطة M .

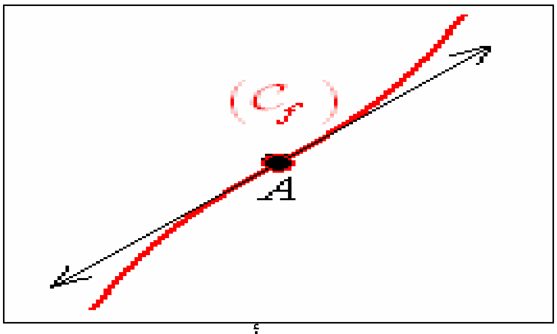
➢ إذا كانت f'' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها بجوار x_0 ؛ فإن النقطة $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

x		x_0	
$f''(x)$	-	0	+
تقعر (C_f)	مقعر	$A\begin{pmatrix} x_0 \\ f\left(x_0\right) \end{pmatrix}$	محدب

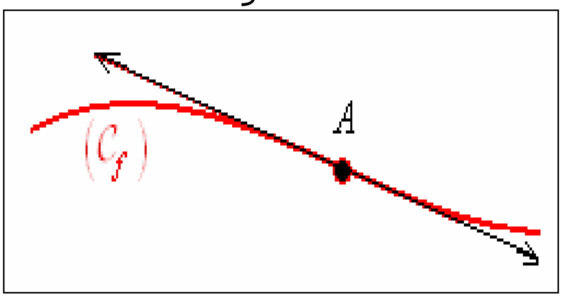
النقطة $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطاف انعطاف للمنحنى (C_f).

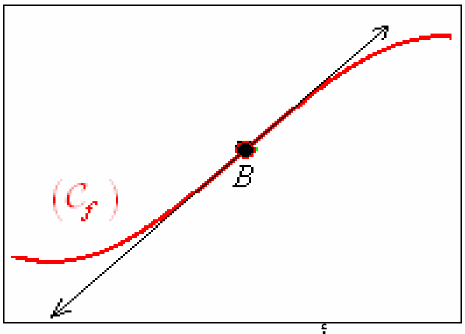
x		x_0	
$f''(x)$	+	0	-
تقعر (C_f)	محدب	$B\begin{pmatrix} x_0 \\ f\left(x_0\right) \end{pmatrix}$	مقعر

النقطة $B\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطاف انعطاف للمنحنى (C_f).

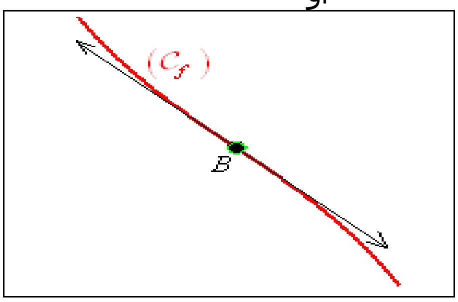


أو





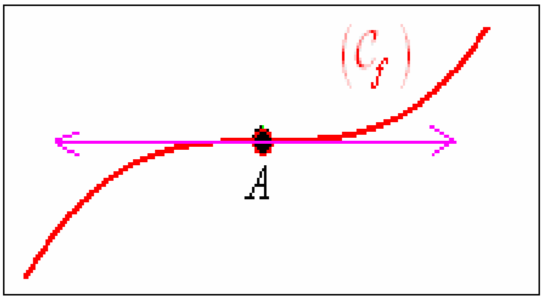
أو



➢ إذا كانت f' تنعدم في x_0 **ولا** تغير إشارتها بجوار x_0 ؛ فإن النقطة $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

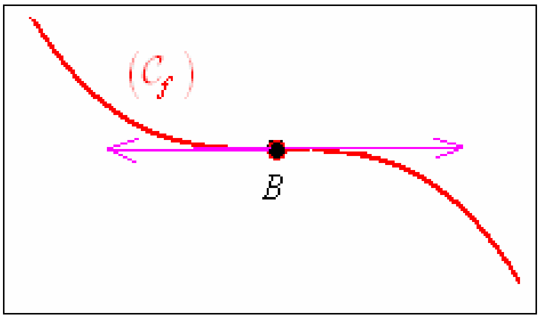
x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$(\mathcal{C}_f)$		$f(x_0)$	

النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$



x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$(\mathcal{C}_f)$		$f(x_0)$	

النقطة $B(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$



IV. مثال لتمثيل مبياني لدالة عددية :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \sqrt{x^2 - 1} & ; \quad x \geq 1 \\ Arc\tan\left(1 - x^2\right) & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

نلخص دراسة الدالة وتمثيل الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-2 \Vert +\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$