الاشتقاق وتطبيقاته
دراسة الدوال

أهداف الدرس

❖ تعرف العدد المشتق و الدالة المشتقة ❖ تعرف الكتابة التفاضلية ❖ تعرف مشتقة مركب دالتين ❖ تعرف مشتقة الدالة العكسية لدالة ❖ تحديد مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$	❖ تحديد مشتقة الدالة $x \mapsto (u(x))^r$ ❖ تعرف الدوال الأصلية لدالة ❖ التمكن من دراسة دوال حدودية ❖ التمكن من دراسة الدوال الجذرية و لا جذرية ❖ التمكن من دراسة دوال مثلثية

القدرات المنتظرة

❖ حساب مشتقات الدوال الاعتيادية ❖ تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة دالتها المشتقة ❖ تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراته أو من تمثيلها المبياني ❖ الحل المبياني لمعادلات من الشكل $f(x)=g(x)$ و متراجحات من الشكل $f(x)\leq g(x)$	❖ تحديد مشتقة و رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال و تمثيلها مبيانيا ❖ حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية ❖ دراسة و تمثيل دوال لا جذرية و دوال مثلثية ❖ تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية ❖ استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية على مجال

الامتدادات

❖ المتتاليات العددية ❖ الدوال اللوغارتمية و الدوال الأسية ❖ العلوم الاقتصادية	❖ الحساب التكاملي ❖ الإحصاء و الاحتمالات ❖ العلوم الفيزيائية و علوم الحياة و الأرض ❖ الجغرافيا

فقرات الدرس

❖ تذكير و إضافات ❖ العمليات على الدوال المشتقة ❖ مشتقة مركب دالتين ❖ مشتقة الدالة العكسية	❖ الدوال الأصلية لدالة ❖ التمثيل المبياني لدالة (تذكير) ❖ تقعر منحنى – نقط انعطاف ❖ محور تماثل – مركز تماثل

I)- تذكير و إضافات

1)- العدد المشتق – الدالة المشتقة Nombre dérive – Fonction dérivée

تعاريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و $x_0 \in I$.

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 ،إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$
- العدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 و يرمز له بالرمز $f'(x_0)$.
- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
- الدالة $f' : x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على المجال I .

ملاحظة

بوضع : $h = x - x_0$ لدينا:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}$$

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإنها متصلة في x_0 .

ملاحظة

- عكس الخاصية السابقة غير صحيح. (الدالة $f : x \mapsto |x|$ متصلة و غير قابلة للاشتقاق في 0).
- إذا كانت f غير متصلة في x_0 ، فإنها غير قابلة للاشتقاق في x_0 .

2)- معادلة المماس لمنحنى دالة – الدالة التآلفية المماسة لدالة

خاصية1

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 فإن منحنى الدالة f يقبل مماسا (T) في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ ، معادلته: $(T) : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

مثـال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

- أحسب $f'(0)$ ثم حدد معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها صفر.

خاصية2

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين (أو على اليسار) فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامله الموجه هو $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$).

خاصية3

إذا كانت f دالة متصلة في x_0 و $\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي في النقطة $A(x_0, f(x_0))$.

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2 - x}$.

1) – تحقق من أن $D_f =]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$.

2) – أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليسار و في 1 على اليمين ثم أول النتيجتين هندسيا .

تعريف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0.

- ❖ الدالة $x \mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0.
- ❖ لدينا : $f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و هو التقريب التآلفي ل $f(x)$ بجوار x_0.
- ❖ لدينا : $f(x_0+h) \approx f'(x_0)h+f(x_0)$ و هو التقريب التآلفي ل $f(x_0+h)$ بجوار الصفر.

مثال: التقرب المحلي لدالة بجوار x_0

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

1) – حدد التقريب التآلفي للدالة f بجوار العدد 1.

2) – استنتج قيمة مقربة لكل من $\dfrac{1}{\sqrt{0.999}}$ و $\dfrac{1}{\sqrt{1.002}}$.

3)- جدول الدوال المشقة لبعض الدوال الاعتيادية

الدالة f	مجموعة تعريف f	الدالة f'	f قابلة للاشتقاق على المجال
$x \mapsto a, (a \in \mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$	$x \mapsto 0$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \mapsto 1$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$	$]-\infty,+\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \mapsto \cos x$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \mapsto -\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto 1+\tan^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$

تمرين: النهايات و العدد المشتق

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{x-\dfrac{\pi}{3}}$ و $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ و $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{2\sin x-\sqrt{2}}$.

3)- الكتابة التفاضلية Ecriture différentielle

إذا كان $y=f(x)$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I فإننا نكتب اصطلاحا:

$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ أو $f'(x)=\dfrac{\partial y}{\partial x}$ أو $dy=f'(x)dx$ وهذه الكتابة تسمى الكتابة التفاضلية.

II)- العمليات على الدوال المشتقة

خاصية

- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I ، و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن:الدوال $f+g$ و λf و fg ، دوال قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $(f+g)' = f'+g'$ و $(\lambda f)' = \lambda f'$ و $(fg)' = f'g+fg'$.
- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I ، و g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتان قابلتان للاشتقاق على I ، و لدينا: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ و $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

نتائج

- كل حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

III)- مشتقة مركب دالتين Dérivée de la composée de deux fonctions

خاصية

لتكن f و g دالتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J بحيث: $f(I) \subset J$. و ليكن $x_0 \in I$.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ ، فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا : $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ ، فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \cos(1+x^2)$.

لدينا: الدالة $u : x \mapsto 1+x^2$ قابلة للاشتقاق على المجال $I = \mathbb{R}$.

و لدينا: الدالة $v : x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على المجال $J = \mathbb{R}$.

و بما أن $f = v \circ u$ و $u(I) \subset J$ فإن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x\sin(1+x^2)$.

نتائج

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f^n قابلة للاشتقاق على I : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (f^n)' = nf' f^{n-1}$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على I فإن $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I : $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

IV)- مشتقة الدالة العكسية Dérivée de la fonction réciproque

خاصية1

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I ضمن $\mathbb{R}$ ، و $x_0 \in I$.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 بحيث $f'(x_0) \neq 0$ ، فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ و لدينا: $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x \in I, f'(x) \neq 0)$ ، فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا: $\forall y \in f(I) : (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$.

نتائج: مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و مشتقة الدالة $x \mapsto x^r$.

- ❖ الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$.
- ❖ الدالة $x \mapsto x^r$ $\left(r \in \mathbb{Q}^*\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, \left(x^r\right)' = rx^{r-1}$.

مثال1

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x}$.

الدالة f معرفة على المجال $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

(مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$). و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

مثال2

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 + x^{\frac{2}{3}}$.

الدالة f معرفة على $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. (لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$). و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

خاصية2

- ❖ إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ ، $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ قابلة للاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $\forall x \in I, \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$.
- ❖ إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \left(u(x)\right)^r$ ، $\left(r \in \mathbb{Q}^*\right)$ قابلة للاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $\forall x \in I, \left(\left(u(x)\right)^r\right)' = ru'(x)\left(u(x)\right)^{r-1}$.

مثال1

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2 - x}$.

لدينا : الدالة f معرفة على $D_f =]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$.

الدالة $x \mapsto x^2 - x$ موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

إذن f قابلة للاشتقاق على المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا:

$$\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[, f'(x) = 1 - \frac{\left(x^2 - x\right)'}{3\left(\sqrt[3]{x^2 - x}\right)^2} = 1 - \frac{2x - 1}{3\left(\sqrt[3]{x^2 - x}\right)^2}$$

مثال2

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}$.

لدينا : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

الدالة $x \mapsto x^2-1$ موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$ ،

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$ ولدينا:

$$\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[: f'(x)=\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}-1}=\frac{4}{3}x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{4x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}}$$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

1) – بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

2) – أحسب $f(0)$ ثم بين أن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و احسب $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

V)- الدوال الأصلية لدالة Fonctions primitives d'une fonction

1)- دالة أصلية لدالة على مجال

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ضمن $\mathbb{R}$.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I، كل دالة F قابلة للاشتقاق على I بحيث $F'=f$.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x+2$.

- الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $F(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$ هي دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$.
- الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $F(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+-2$ هي أيضا دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$.

خاصية1

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I، و F دالة أصلية لها على I.

الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x\mapsto F(x)+k, (k\in\mathbb{R})$.

برهان

لدينا F دالة أصلية للدالة f على مجال I.

❖ إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على I فإن G قابلة للاشتقاق على I ولدينا $G'=f$ إذن $G'=F'$

أي $(G-F)'=0$ على I و منه $\exists k\in\mathbb{R} / G-F=k$. و بالتالي: $\forall x\in I, G(x)=F(x)+k$.

❖ عكسيا إذا كانت G دالة معرفة على I بما يلي: $G(x)=F(x)+k$، حيث $k\in\mathbb{R}$ فإن G قابلة للاشتقاق على المجال I و لدينا $G'=F'=f$، و منه G دالة أصلية للدالة f على المجال I.

خاصية2

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I، و $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$.
إذا كانت f تقبل دالة أصلية على I فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I تحقق $G(x_0) = y_0$.

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I =]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + 1$.

1) – حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I.
2) – حدد الدالة الأصلية G للدالة f على المجال I التي تحقق $G(1) = 0$.

خاصية3

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I.

خاصية4

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I ، و $k \in \mathbb{R}$.
إذا كانت F و G على التوالي دالتين أصليتين للدالتين f و g على I فإن:

- ❖ الدالة $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I.
- ❖ الدالة kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I.

تمرين

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \begin{cases} 2x+1, x \le 1 \\ -x+4, x > 1 \end{cases}$.

1) – بين أن الدالة f تقبل دوال أصلية على $\mathbb{R}$.
2) – حدد الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
3) – حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق $G(0) = 0$.

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بما يلي: $f(x) = x\cos x - \sin x$.

1) – أحسب $f'(x)$ لكل x من $[0,\pi]$.
2) – أ- استنتج الدوال الأصلية للدالة g المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بما يلي: $g(x) = x\sin x - \cos x$
ب- حدد الدالة الأصلية G للدالة g التي تحقق الشرط البدئي $G(\pi) = 0$.

تمرين

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي: $f(x) = \tan^2 x$ و $g(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

- ❖ حدد الدوال الأصلية لكل من الدالتين f و g على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2)- جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

الدالة f معرفة على مجال I	الدوال الأصلية ل f على المجال I	المجال I
$x \mapsto a,(a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c,(c \in \mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c,(c \in \mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x^n,(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c,(c \in \mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n},(n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + c,(c \in \mathbb{R})$	$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c,(c \in \mathbb{R})$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto x^r,(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c,(c \in \mathbb{R})$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c,(c \in \mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c,(c \in \mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + c,(c \in \mathbb{R})$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,k \in \mathbb{Z}$

3)- الدوال الأصلية و العمليات

الدالة f معرفة على مجال I	الدوال الأصلية ل f على المجال I	ملاحظات
$x \mapsto u'(x)(u(x))^n,(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x) + c,(c \in \mathbb{R})$	u لا تنعدم على I
$x \mapsto \frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$x \mapsto -\frac{1}{u(x)} + c,(c \in \mathbb{R})$	u موجبة قطعا على I
$x \mapsto u'(x)(u(x))^r,(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1} + c,(c \in \mathbb{R})$	u موجبة قطعا على I
$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)} + c,(c \in \mathbb{R})$	
$x \mapsto u'(x) + v'(x)$	$x \mapsto u(x) + v(x) + c,(c \in \mathbb{R})$	
$x \mapsto u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$	$x \mapsto u(x)v(x) + c,(c \in \mathbb{R})$	
$x \mapsto \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$	$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)} + c,(c \in \mathbb{R})$	
$x \mapsto u'(ax+b),a \in \mathbb{R}^*,b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}u(ax+b) + c,(c \in \mathbb{R})$	
$t \mapsto \cos(\omega t + \varphi),\omega \in \mathbb{R}^*,\varphi \in \mathbb{R}$	$t \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$	
$t \mapsto \sin(\omega t + \varphi),\omega \in \mathbb{R}^*,\varphi \in \mathbb{R}$	$t \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$	

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

1) – حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث: $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$.

2) – استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

3) – استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $[0,+\infty[$ التي تحقق: $F(1)=\dfrac{5}{2}$.

تمرين

حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

- $I=\mathbb{R},\ f(x)=3x^4-3x^2+x-1$
- $I=]-\infty,-1[,\ f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)}$
- $I=]1,+\infty[,\ f(x)=x^2(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$
- $I=[2,+\infty[,\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
- $I=]0,+\infty[,\ f(x)=x^2+x\sqrt[3]{x^2+1}$
- $I=]-\infty,+\infty[,\ f(x)=\cos x\sin^4 x$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x\sqrt{x-1}$.

1) – بين أن $\forall x\in[1,+\infty[,\ f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}$.

2) – حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال $[1,+\infty[$

3) – استنتج الدالة الأصلية F للدالة f التي تحقق $F(1)=2$.

VI)- التمثيل المبياني لدالة عددية – الفروع اللانهائية لمنحنى دالة (تذكير)

نفترض فيما تبقى أن f دالة عددية لمتغير حقيقي x ، و (C_f) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)- المقارب العمودي أو الموازي لمحور الأراتيب l'asymptote verticale ou prallele à l'axe des ordonnées

تعريف

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الأراتيب (أو عمودي)

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

2)- المقارب الأفقي أو الموازي لمحور الأفاصيل l'asymptote verticale ou prallele à l'axe des abscisses

تعريف

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الأفاصيل (أو أفقي)

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

3)- المقارب المائل l’ asymptote oblique

تعريف

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ على التوالي بجوار $-\infty$ إذا كانت ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$) على التوالي ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$).

خاصية

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$, $(a \neq 0)$ مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$.

ملاحظة

- ❖ نحصل على نفس الخاصية إذا عوضنا $(x \to +\infty)$ ب $(x \to -\infty)$.
- ❖ إذا كانت $f(x) = ax + b + h(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ يكون مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) بجوار ∞.

4)- الفروع الشلجمية Les branches paraboliques

تعريف1

- ❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.
- ❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

تعريف2

- ❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a, (a \neq 0)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ بجوار $+\infty$.

ملاحظة

نعرف بالمثل الفروع الشلجمية للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

تمرين

حدد D_f ثم أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f في الحالات التالية:

$f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

$f(x) = \sqrt[3]{2x + 1} - x$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}$

خلاصة الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$</td><td colspan="3">المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$</td><td colspan="3">المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$</td><td colspan="3">المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$</td><td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a$
مع $(a\neq 0)$</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=b$</td><td>المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$
مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=\pm\infty$</td><td>$(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه
المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$</td><td colspan="2">المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$</td><td colspan="2">المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$</td><td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=a$
مع $(a\neq 0)$</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax)=b$</td><td>المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$
مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax)=\pm\infty$</td><td>$(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه
المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$</td><td colspan="2">المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=0$</td><td colspan="2">المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$</td></tr>
</table>

VI)- تقعر منحنى – نقط انعطاف

1)- تقعر منحنى concavité d'une courbe

تعريف

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I.

- نقول إن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب الموجبة إذا كان يوجد فوق جميع مماساته.
- نقول إن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب السالبة إذا كان يوجد تحت جميع مماساته.

2)- نقطة انعطاف Point d'inflexion

تعريف

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I، و $x_0\in I$.

نقول إن النقطة $A(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) إذا تغير تقعره عند النقطة A.

خاصية1

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ، و $x_0 \in I$.

- ❖ إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب الموجبة.
- ❖ إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب السالبة.
- ❖ إذا انعدمت f'' في x_0 و تغيرت إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف (C_f).

خاصية2

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I ، و $x_0 \in I$.

إذا انعدمت f' في x_0 و لا تغير إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف (C_f).

ملاحظة

إذا انعدمت f' في x_0 و لا تغير إشارتها بجوار x_0 فإن (C_f) يقبل مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0, f(x_0))$.

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

1) - حدد D_f ، حيز تعريف الدالة f.

2) – أدرس تقعر منحنى الدالة f ثم حدد نقط انعطافه.

VIII)- محور تماثل – مركز تماثل Axe de symétrie – centre de symétrie

خاصيات

لتكن f دالة عددية معرفة على D_f و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم و $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- ❖ المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل المنحنى (C_f) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(2a - x) = f(x) \end{cases}$.
- ❖ النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$.

ملاحظة

- ❖ إذا كانت f دالة زوجية فإن محور الأراتيب ، محور تماثل منحناها (C_f) في معلم متعامد ممنظم.
- ❖ إذا كانت f دالة فردية فإن أصل المعلم ، مركز تماثل منحناها (C_f).

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{2 - x}, x \le 2 \\ (4 - x)\sqrt[3]{x - 2}, x > 2 \end{cases}$

و ليكن (C_f) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- ▪ بين أن المستقيم الذي معادلته $x = 2$ محور تماثل للمنحنى (C_f).

IX)- أمثلة من دراسة دالة عددية

مثال1: دراسة دالة حدودية

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$.

1) - حدد D_f ، ثم أحسب النهايات عند محدات D_f.

2) – أ- بين أن $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=x\left(x^2-x-2\right)$.

ب- أدرس تغيرات الدالة f.

3)- أ- حدد تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري المعلم.

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

4)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم.

مثال2 : دراسة دالة جذرية

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2+4x}{x+1}$.

1) – أ- حدد D_f ، ثم أحسب النهايات عند محدات D_f.

ب- بين أن النقطة $\Omega(-1,2)$ مركز تماثل منحنى الدالة f

2) – أ- بين أن $\forall x\in D_f, f'(x)=\frac{(x+1)^2+3}{(x+1)^2}$.

ب- استنتج رتابة الدالة f على كل من المجالين $]-1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$.

3) – أ- حدد تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري المعلم.

ب- أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.

ج- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم.

4) - لتكن g قصور الدالة f على المجال $]-1,+\infty[$.

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J ينبغي تحديده.

ب- حدد التعبير $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.

مثال3: دراسة دالة مثلثية

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{1-\cos 4x}$،

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) - حدد D_f ، مجموعة تعريف الدالة f.

2) – أ- بين أن $\forall x\in D_f, f(x)=\frac{1}{4\sin 2x}$.

ب - بين أن f دالة دورية دورها π .

ج- بين أن f فردية ثم استنتج أن مجموعة دراسة الدالة f هي $D_E=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3)- أ- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $D_E=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

ب- أنشئ المنحنى (C_f) على المجموعة $[-\pi,\pi]\cap D_f$

مثال4: دالة تحتوي على الجذر من الرتبة n.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[\frac{-1}{3},+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=-x+\left(\sqrt[3]{1+3x}\right)^2$.

1)- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2)- أ – ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $-\frac{1}{3}$ على اليمين ثم أول النتيجة هندسيا .

ب- بين أن $f'(x)=\frac{2-\sqrt[3]{1+3x}}{\sqrt[3]{1+3x}}$ لكل x من المجال $\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$.

ج – أدرس إشارة $f'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

3) – بين أن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $y=-x$

4) – نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=f(x)-x$

أ – بين أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0\,,2]$.

ب – استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,2]$.

5) – أرسم منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

مثال5: دالة تحتوي على الجذر من الرتبة n.

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{3}x-\sqrt[3]{x}$.

1)-أ- حدد D_f , مجموعة تعريف الدالة f .

ب- أحسب : $f(0)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)-أ- أدرس قابلية اشتقاق f في الصفر علي اليمين ثم أول النتيجة هندسيا .

ب- بين أن : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[, f'(x)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$.

ج- أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

3)-أ- أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

ب-أرسم منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.