جوهرة

الأعداد العقدية

ELJOHRA
09/06/2009

الأعداد العقدية 6
الحصة رقم 1 6
I. تقديم المجموعة C 6
1. تقديم 6
2. تعاريف و مصطلحات 6
3. تساوي عددين عقديين 6
4. التمثيل الهندسي لعدد عقدي : لحق نقطة – لحق متجهة 6
a. نشاط 4 ص 144 6
b. تعريف 6
c. خاصية 7
الحصة رقم 2 8
II. العمليات الجبرية و تأويلاتها الهندسية 8
1. لحق منتصف قطعة 8
2. التأويل الهندسي لضرب عدد حقيقي في عدد عقدي 8
3. حالة خاصة 8
4. استقامية ثلاث نقط 8
الحصة رقم 3 9
5. التأويل الهندسي لمجموع عددين عقديين 9
6. تداور نقط 9
a. تذكير 9
b. خاصية 9
c. مثال تطبيقي1 10
الحصة رقم 4 11
7. منصف زاوية 11
a. نمرين تطبيقي 11
b. الحل 11
8. أسات العدد i 11
الحصة رقم 5 12
III. مرافق عدد عقدي 12
1. تعريف 12
2. التأويل الهندسي 12
3. امثلة 12
4. نتائج 12
5. خاصية 12
6. المرافق و العمليات 12
الحصة رقم 6 14

7. تمارين 14
الحصة رقم 7 15
IV. معيار عدد عقدي 15
1. نشاط ص 145 15
الحصة رقم 8 16
2. تعريف 16
3. التأويل الهندسي 16
4. نتيجة 16
5. خاصيات 16
الحصة رقم 9 17
6. تمارين 17
1. تمرين 1 17
2. تمرين 2 17
3. تمرين 3 17
الحصة رقم 10 18
V. عمدة عدد عقدي غير منعدم 18
1. تعريف 18
2. ملاحظة 18
3. نتائج مباشرة 18
4. خاصية 19
5. مثال تطبيقي ص 113 19
الحصة رقم 11 20
VI. الشكل المثلثي لعدد عقدي 20
1. نشاط 20
2. تعريف 20
3. مثال 20
4. تمرين 2 ص 115 20
5. خاصية 21
6. تمرين 1 ص 115 21
الحصة رقم 12 22
7. تساوي عددين على شكليهما المثلثي 22
8. تمرين 3 ص 115 22
الحصة رقم 13 23
VII. جداء و خارج عددين عقديين باستعمال الشكل المثلثي 23
1. خاصية1 23
2. خاصية 2 23

3. خاصية 3 23
4. خاصية 4 23
5. خاصية 5 : صيغة موافر formule de MOIVRE 23
6. تطبيق 23
الحصة رقم 14 25
VIII. زاوية متجهتين و عمدة خارج لحقيهما 25
1. خاصية 25
2. تطبيقات 1 25
a. استقامية ثلاث نقط 25
b. توازي مستقيمين 25
c. تعامد مستقيمين 25
3. تمرين 25
الحصة رقم 15 26
IX. التمثيل العقدي للإزاحة و التحاكي 26
1. الإزاحة 26
a. نشاط 26
b. خاصية 26
2. التحاكي 26
a. نشاط 26
b. خاصية 26
X. مستقيم أولير 26
الحصة رقم 16 27
XI. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة C 27
1. المعادلة $z^2=a$ حيث a عدد حقيقي غير منعدم 27
a. خاصية 27
b. أمثلة 27
2. المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم 27
a. نشاط 27
b. خاصية 27
c. نتائج 27
الحصة رقم 17 28
3. تمارين 28
تمرين 1 28
تمرين 2 28
الحصة رقم 18 29

XII. الترميز الأسي لعدد عقدي 29
1. ترميز 29
2. أمثلة 29
3. ملاحظات 29
4. خاصيات 29
5. حساب $\cos(n\theta)$ و$\sin(n\theta)$ باستعمال صيغة موافر 29
a. تطبيق 1 ص 234 29
6. تعريف 29
7. أمثلة 29
8. صيغتا أولير 30
الحصة رقم 19 31
XIII. تطبيقات 31
3. تمارين ص 235 31
الحصة رقم 20 32
4. إخطاط الحدوديات من $\cos(\theta)$ و$\sin(\theta)$ باستعمال صيغتي أولير 32
a. مثال 32
b. الحل 32
5. تمرين 32
الحصة رقم 21 33
XIV. II. التمثيل العقدي لدوران 33
1. نشاط 33
2. الحل 33
3. خاصية 33
4. برهان 33
5. أمثلة 33
6. تطبيق ص 237 33

الأعداد العقدية

الحصة رقم 1

I. تقديم المجموعة C

1. تقديم

المجموعة الأعداد العقدية رمزها C و تحقق الشروط التالية :

- $IR \subset C$
- عمليتا الضرب و الجمع في C تمددان عمليتي الضرب و الجمع في IR ، و لهما نفس الخاصيات ما عدا تلك التي تتعلق بالترتيب.
- المجموعة C تحتوي على عنصر تخيلي رمزه i و يحقق المعادلة $i^2=-1$
- كل عدد عقدي يكتب بصفة وحيدة على شكل z=a+ib حيث a و b عددين حقيقيين.

2. تعاريف و مصطلحات

الكتابة z=a+ib حيث a و b عددين حقيقيين تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z.
العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي للعدد العقدي z و نكتب : Re(z)=a.
العدد الحقيقي b يسمى الجزء التخيلي للعدد العقدي z و نكتب : Im(z)=b
كل عدد عقدي على شكل ib يسمى عددا تخيليا صرفا .
مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة يرمز لها بالرمز iIR : أي $iIR = \{ib / b \in IR\}$

3. تساوي عددين عقديين

ليكن z = a + i b و z' = a' + i b' عددين عقديين مكتوبين على شكليهما الجبري. لدينا :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

4. التمثيل الهندسي لعدد عقدي : لحق نقطة – لحق متجهة

a. نشاط 4 ص 144

b. تعريف

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$

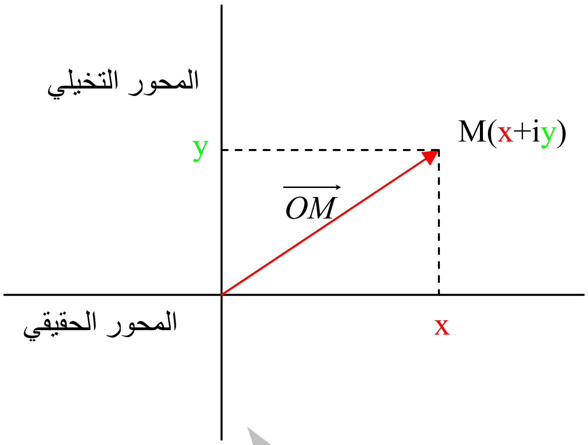
كل عدد عقدي z = x + i y حيث $(x, y) \in IR^2$ يربط بالنقطة M(x,y) و بالمتجهة $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

النقطة M تسمى صورة العدد العقدي z و نكتب M(z)

المتجهة $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تسمى المتجهة الصورة للعدد العقدي z و نكتب $\overrightarrow{OM}(z)$

العدد العقدي z يسمى لحق النقطة M و نكتب z_M و يسمى أيضا لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب $z_{\overrightarrow{OM}}$

المستوى (P) يسمى المستوى العقدي :



c. خاصية

إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي ، لحقيهما Z_A و Z_B على التوالي ، فإن لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو العدد العقدي Z_B-Z_A.

الحصة رقم 2

II. العمليات الجبرية و تأويلاتها الهندسية

1. لحق منتصف قطعة

خاصية

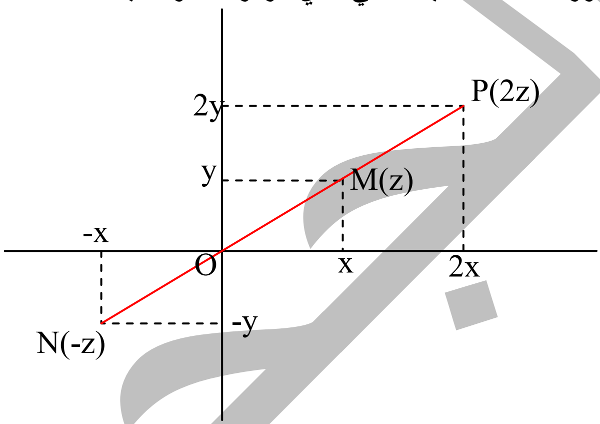
إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي لحقيهما على التوالي Z_A و Z_B ، فإن لحق النقطة I منتصف القطعة [AB] هو العدد العقدي : $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$

2. التأويل الهندسي لضرب عدد حقيقي في عدد عقدي

لتكن M(x,y) النقطة ذات اللحق z=x+iy و k عددا حقيقيا غير منعدم.

الجداء kz = kx + i ky هو لحق النقطة P(kx,ky) التي تحقق . $\overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{OM}$

إذن النقطة P هي صورة النقطة M بالتحاكي الذي مركزه O و نسبته k .



الشكل:

3. حالة خاصة

النقطتان M(z) وN(-z) متماثلتان بالنسبة للنطة O.

4. استقامية ثلاث نقط

خاصية

A و B و C ثلاث نقط مختلفة و Z_A و Z_B و Z_C ألحاقها على التوالي

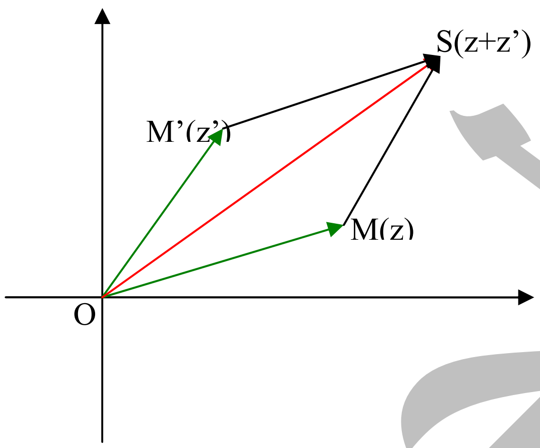
تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \in IR$

الحصة رقم 3

5. التأويل الهندسي لمجموع عددين عقديين

لتكن M و M' نقطتين من المستوى العقدي لحقيهما على التوالي Z و Z' بحيث Z=x+iy و Z'=x'+iy' مع x و x' و y و y' أعداد حقيقية.

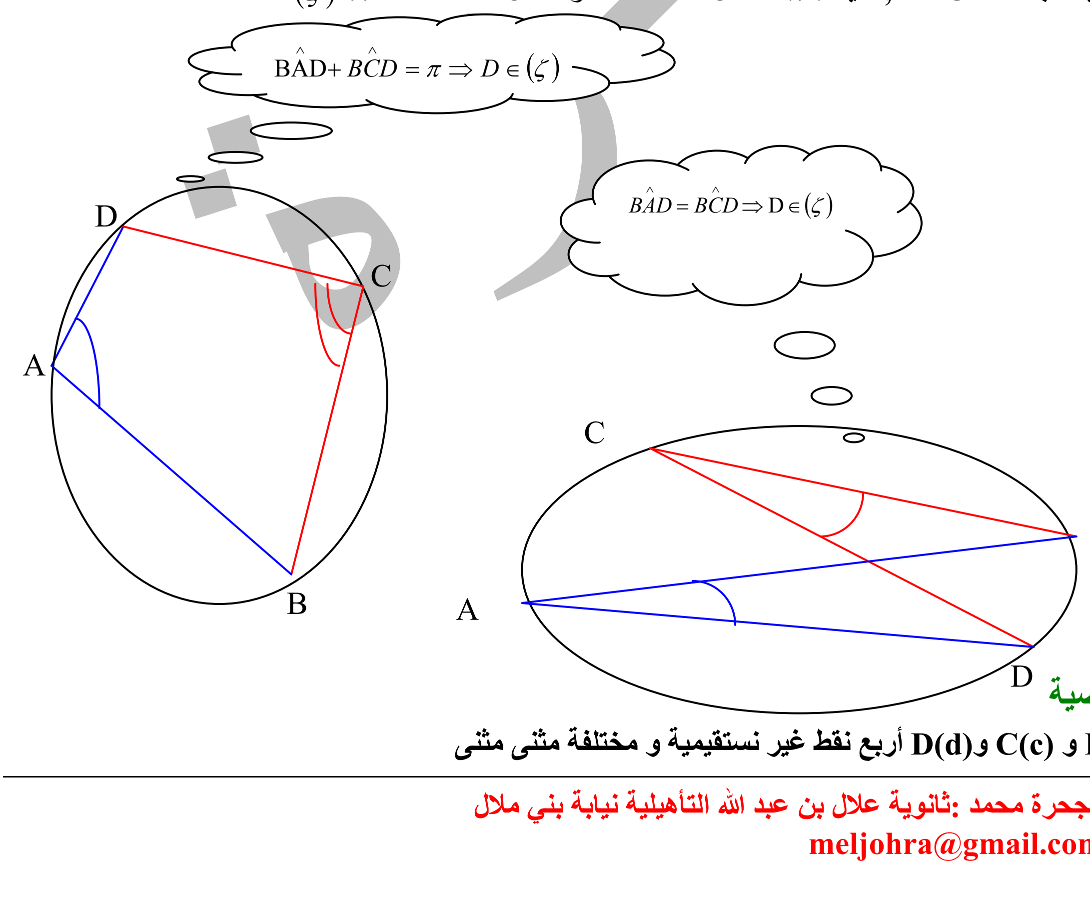
نعتبر النقطة S التي تحقق $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$, لدينا $\overrightarrow{OS}(x+x',y+y')$ و منه لحق النقطة S هو العقدي Z+Z'
نستنتج أن Z+Z' هو لحق النقطة S بحيث يكون الرباعي OMSM' متوازي أضلاع
الشكل



6. تداور نقط

a. تذكير

(ζ) دائرة محيطة بالمثلث ABC , لدينا : $B\hat{A}D+B\hat{C}D=\pi$ أو $D\in(\zeta)\Leftrightarrow B\hat{A}D=B\hat{C}D$



b. خاصية

A(a) وB(b) و C(c) وD(d) أربع نقط غير نستقيمية و مختلفة مثنى مثنى

تكون النقط A وB وC وD متداورة إذا وفقط إذا كان: $\frac{d-a}{b-a}\times\frac{d-c}{b-c}\in IR$ أو $\frac{d-a}{b-a}\times\frac{b-c}{d-c}\in IR$

c. مثال تطبيقي1

بين أن النقط O و A(-2i) و B(2) و $C\left(\sqrt{2}+1-i\right)$ متداورة
استنتج كيفية إنشاء النقطة C

الحصة رقم 4

7. منصف زاوية

a. تمرين تطبيقي

نعتبر النقط A وB وC وD التي ألحاقها على التوالي $a=2-2i$ و $b=-1+7i$ و $c=4+2i$ و $d=-4-2i$

حدد e لحق النقطة E منتصف القطعة [AB]

أحسب $\frac{a-e}{d-e}$ ثم $\frac{c-e}{a-e}$

ماذا يمثل المستقيم (AE) بالنسبة للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC}}\right)$

b. الحل

8. أسات العدد i

تمرين

أحسب i^3 و i^4 و i^5 و i^6 و i^7 و i^8

بين أنه إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا مضاعفا للعدد 4 فإن $i^n=1$

أحسب حسب قيم العدد الصحيح الطبيعي n العدد i^n

أحسب $(1+i)^2$

استنتج $(1+i)^{2007}$

احسب المجموع $S=1+i+i^2+i^3+....+i^{2008}$

الحصة رقم 5

III. مرافق عدد عقدي

1. تعريف

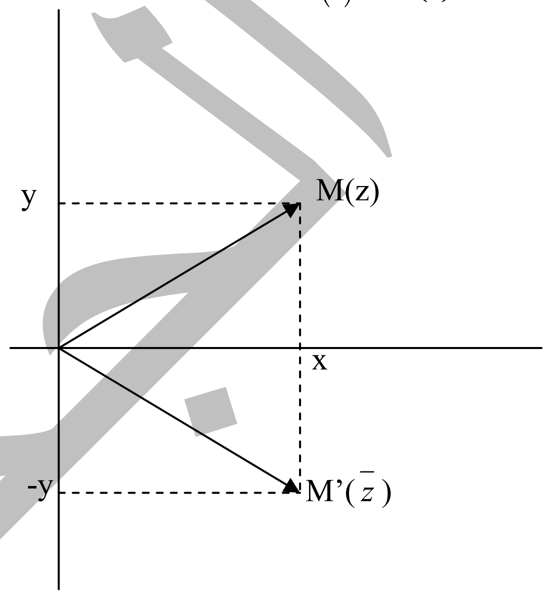
ليكن $z = x + i y$ حيث $(x,y) \in IR^2$ عددا عقديا مكتوبا على شكله الجبري

العدد $\bar{z} = x - iy$ يسمى مرافق العدد العقدي z=x+iy

2. التأويل الهندسي

نضع $z = x + i y$.

النقطتان M(z) و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي



3. امثلة

4. نتائج

ليكن $z = x + i y$ حيث $(x,y) \in IR^2$ عددا عقديا مكتوبا على شكله الجبري لدينا :

- ❖ $\bar{\bar{z}} = z$
- ❖ $z\bar{z} = x^2 + y^2$
- ❖ $z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re}(z)$
- ❖ $z - \bar{z} = 2y = 2\operatorname{Im}(z)$

5. خاصية

لكل z عدد عقدي لدينا :

- ❖ $z \in IR \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$
- ❖ $z \in iIR \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

6. المرافق و العمليات

ليكن z و 'z عددين عقديين لدينا :

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z\,z'}=\overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ **حيث** $z\neq 0$
- $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$ **حيث** $z\neq 0$ **و n عددا نسبيا**

الحصة رقم 6

7. تمارين

a. تمرين تطبيقي ص 155

b. تمرين 1

حدد هندسيا مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون $\frac{z+2i}{z-4i}$ حقيقيا

c. تمرين 2

حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون $T = z^2 - \overline{z}$ عددا حقيقيا

الحصة رقم 7

IV. معيار عدد عقدي

1. نشاط ص 145

الحصة رقم 8

2. تعريف

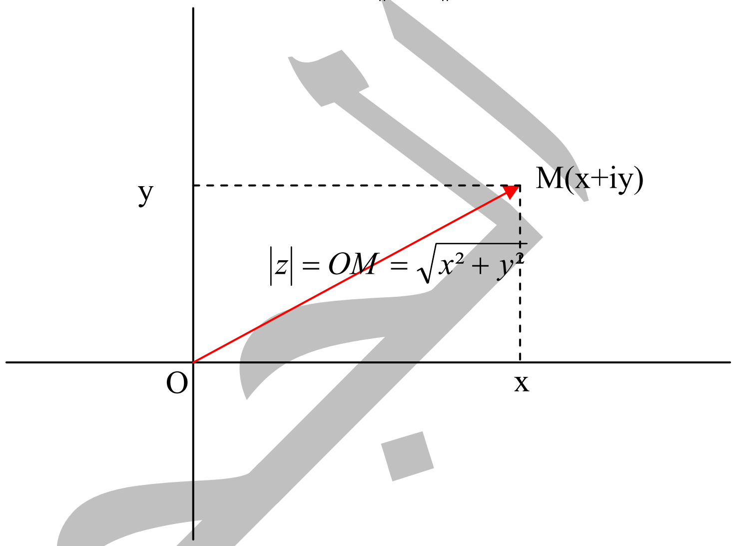
ليكن $z = x = iy$ عددا عقديا حيث x و y عددان حقيقيان.

العدد الحقيقي الموجب $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ يسمى معيار العدد العقدي z.

3. التأويل الهندسي

لتكن M(z) النقطة صورة العدد العقدي z =x+iy حيث x وy عددان حقيقيان

لدينا $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$:



4. نتيجة

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي، لحقيهما على التوالي Z_A و Z_B لدينا :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |Z_B - Z_A|$$

5. خاصيات

لكل عددين عقديين z و z' لدينا :

- ❖ $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- ❖ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- ❖ $|zz'| = |z||z'|$
- ❖ $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ حيث $z \neq 0$
- ❖ $|z^n| = |z|^n$ حيث $z \neq 0$ و n عددا نسبيا
- ❖ $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

الحصة رقم 9

6. تمارين

1. تمرين 1

نعتبر النقط A وB و C التي ألحاقها على التوالي:
$Z_C=-1+2i$ و $Z_B=2+3i$ و $Z_A=1+i$
بين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A

2. تمرين 2

لتكن (ζ) مجموعة النقط M(z) بحيث $|z-1+2i|=1$
لتكن (Δ) مجموعة النقط M(z) بحيث $|z|=|\bar{z}-1+2i|$
حدد و أنشئ المجموعتين (ζ) و (Δ).

3. تمرين 3

لكل عدد عقدي z يخالف 1 نضع : $f(z)=\frac{1-z}{\bar{z}-1}$
حل في C المعادلة f(z)=2z
ليكن $z\in C-\{1\}$ بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن f(z)=z

الحصة رقم 10

V. عمدة عدد عقدي غير منعدم

1. تعريف

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي.

نسمي عمدة للعدد العقدي z أحد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}}\right)$ و نرمز له بالرمز arg(z) و نكتب :

$$\arg(z) \equiv \left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$$

2. ملاحظة

العدد 0 ليس له عمدة

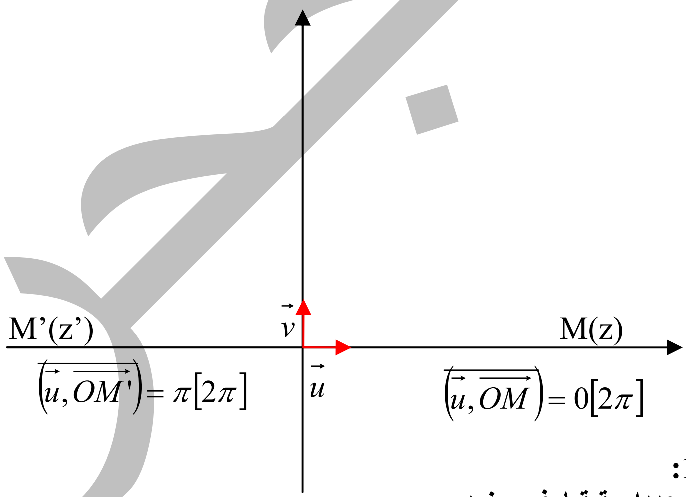
3. نتائج مباشرة

ليكن z عددا عقديا غير منعدم لدينا :

$$z \in IR^{*+} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = 2k\pi \;;\; k \in Z$$

$$z \in IR^{*-} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = (2k+1)\pi \;;\; k \in Z$$

$$z \in IR \Leftrightarrow z = 0 \text{ أو } \arg(z) = k\pi \;;\; k \in Z$$



الشكل 1:

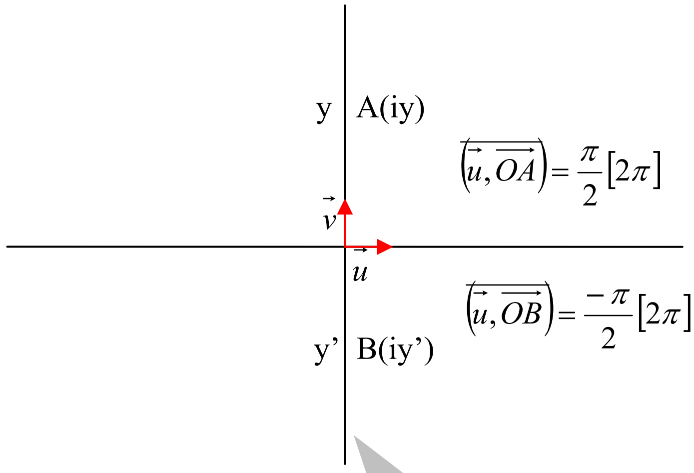
ليكن y عددا حقيقيا غير منعدم

$$y > 0 \Rightarrow \arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$y < 0 \Rightarrow \arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$z \in iIR \Leftrightarrow z = 0 \text{ أو } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \;;\; k \in Z$$

الشكل 2:



4. خاصية

ليكن z عددا عقديا غير منعدم لدينا الشكل التالي :

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$$

$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$

الشكل:

5. مثال تطبيقي ص 113

نعتبر النقط A و B وC وD التي ألحاقها على التوالي: a=2 و b=-2i و c=2+2i و d=-2+2i .

أنشئ النقط A و B وC وD

حدد عمدة لكل من الأعداد العقدية a وb وc وd

حدد عمدة للعدد العقدي z=2-2i بطريقتين

الحصة رقم 11

VI. الشكل المثلثي لعدد عقدي

1. نشاط

ليكن z = x +i y عددا عقديا حيث $(x,y)\in IR^2$

نضع $r=|z|$ و $\theta=\arg(z)[2\pi]$

لدينا الشكل التالي:

شكل:

ومنه $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

و $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{x}{r}\\ \sin(\theta)=\dfrac{y}{r}\end{cases}$

ومنه $z=x+iy=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$

2. تعريف

الكتابة $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=[r,\theta]$ **تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z**

3. مثال

لنحدد الشكل المثلثي للعدد العقدي z=1+i

لدينا $|1+i|=\sqrt{2}$

ومنه $1+i=\sqrt{2}\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$

ومنه $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

ومنه $\theta=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

نأخذ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

أي $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right]$

4. تمرين 2 ص 115

حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد $Z_1=\sqrt{3}+3i$ **و** $Z_2=-2+2i$ **و** $Z_4=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ **و**

$Z_3=\dfrac{-1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. خاصية

ليكن z عددا عقديا غير منعدم

إذا كان $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ مع $r>0$ فإن $|z|=r$ و $\arg(z)=\theta[2\pi]$

6. تمرين 1 ص 115

أعط شكلا مثلثيا لكل من العددين العقديين : $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ و $z'=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

الحصة رقم 12

7. تساوي عددين على شكليهما المثلثي

ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين
نضع z=[r,θ] و z'=[r',θ']
لدينا $z = z' \Leftrightarrow r = r'$ و $\theta \equiv \theta' [2\pi]$

8. تمرين 3 ص 115

a. **نعتبر العدد العقدي** $z = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
b. **أكتب شكلا مثلثيا للعدد العقدي z**
c. **استنتج قيمة** $\cos\frac{\pi}{12}$

الحصة رقم 13

VII. جداء و خارج عددين عقديين باستعمال الشكل المثلثي

نضع $z=[r,\theta]$ و $z'=[r',\theta']$ عددين عقديين غير منعدمين لدينا الخاصيات التالية:

1. خاصية1

$$[r,\theta]\,[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$$

يعني $|z.z'|=|z|.|z'|$

و $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')+2k\pi$

2. خاصية 2

$$\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$$

يعني $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)+2k\pi$$

3. خاصية 3

$$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$$

يعني $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')+2k\pi$$

4. خاصية 4

شكل

$$\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$$
$$-[r,\theta]=[r,\theta+\pi]$$

5. خاصية 5 : صيغة موافر formule de MOIVRE

لكل n من Z و لكل عدد عقدي غير منعدم $z=[r,\theta]$ لدينا : $z^n=[r^n,n\theta]$

أي $z^n=\left(r(\cos\theta+i\sin\theta)\right)^n=r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$

6. تطبيق

a. تمرين1

أوجد هعيار وعمدة للعدد العقدي $z=\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

b. تمرين 2

نضع $z=\sqrt{3}-i$ و $z'=1-i$ و $u=\frac{z}{z'}$

أكتب على شكلها المثلثي الأعداد z و 'z و u

أكتب u على الشكل الجبري و استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحصة رقم 14

VIII. زاوية متجهتين و عمدة خارج لحقيهما

1. خاصية

ليكن A وB وC وD نقطا من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ، ألحاقها على التوالي Z_A و Z_B و Z_C و Z_D لدينا :

- ❖ $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(Z_B - Z_A)[2\pi]$
- ❖ $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)[2\pi]$
- ❖ $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)[2\pi]$

2. تطبيقات 1

ليكن A وB وC وD نقطا من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ، ألحاقها على التوالي Z_A و Z_B و Z_C و Z_D لدينا :

a. استقامية ثلاث نقط

تكون النقط A وB وC مستقيمية إذا وفقط إذا كان $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \pi\ [2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0\ [2\pi]$

b. توازي مستقيمين

يكون المستقيمان (AB) و (AC) متوازيين إذا و فقط إذا كان

$\arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D}\right) = 0[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D}\right) = \pi[2\pi]$

c. تعامد مستقيمين

يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين إذا و فقط إذا كان

$\arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D}\right) = \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3. تمرين

نعتبر النقط A وB وC التي ألحاقها على التوالي هي : a=-2 و b=1+i و c=-1-3i

حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$

استنتج طبيعة المثلث ABC

الحصة رقم 15

IX. التمثيل العقدي للإزاحة و التحاكي

1. الإزاحة

a. نشاط

نعتبر الإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(1,2)$. و لتكن M(z) و M'(z') نقطتين من المستوى العقدي بحيث t(M)=M'.
حدد z' بدلالة z.
حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A(4+ 3i) بالإزاحة t.
في المستوى العقدي نربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' لحقها z' بحيث z'=z+1-i
حدد لحق المتجهة $\overrightarrow{MM'}$.
استنتج طبيعة التحويل الذي يربط النقطة M بالنقطة M'.

b. خاصية

التمثيل العقدي للإزاحة t ذات المتجهة $\vec{v}(a)$ حيث $(a \in C)$ هو z'=z+a

2. التحاكي

a. نشاط

نعتبر لتحاكي h الذي مركزه النقطة Ω(3,-2) ونسبته 4 . لتكن M(z) و M'(z') نقطتين من المستوى العقدي بحيث h(M)=M'.
حدد تمثيلا عقديا للتحويل الذي يربط النقطة M بالنقطة M' (التعبير عن z' بدلالة z)
في المستوى العقدي نعتبر التحويل T الذي يربط كل نقطة M(z) بالنقطة M'(z') بحيث $z'=\frac{1}{2}z-2i$
حدد ω لحق النقطة Ω الذي يحقق $\omega=\frac{1}{2}\omega-2i$
Ω تسمى نقطة صامدة بالتحويل T.
بين أن $z'-\omega=\frac{1}{2}(z\_\omega)$ ثم أول متجهيا المتساوية الأخيرة
استنتج طبيعة التحويل T.

b. خاصية

Ω نقطة من المستوى لحقها ω من C و k عدد حقيقي غير منعدم. التمثيل العقدي للتحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k هو: z'-ω=k(z-ω).

X. مستقيم أولير

الحصة رقم 16

XI. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة C

1. المعادلة $z^2=a$ حيث a عدد حقيقي غير منعدم

a. خاصية

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم. حلا المعادلة $z^2=a$ في المجموعة C هما :

$\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ إذا كان $a>0$

$i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$ إذا كان $a<0$

b. أمثلة

حلا المعادلة $z^2=7$ هما $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$

حلا المعادلة $z^2=-3$ هما $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$

2. المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a وb وc أعداد حقيقية و a غير منعدم

a. نشاط

حل في المجموعة C المعادلة : $z^2-z+2=0$.

b. خاصية

نعتبر في C المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a وb وc أعداد حقيقية و a غير منعدم.

العدد الحقيقي $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز المعادلة $az^2+bz+c=0$

إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما: $z=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو : $z=\frac{-b}{2a}$

إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين هما: $z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z'=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

c. نتائج

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$ في المجموعة C لدينا :

لكل z من C : $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

$z_1+z_2=\frac{-b}{a}$ و $z_1.z_2=\frac{c}{a}$

الحصة رقم 17

3. تمارين

تمرين 1

حدد الجذرين المربعين لكل من العددين التاليين:

- $a = 4 - 2\sqrt{3}$
- $b = -\cos^2 t;\ \ t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

حل في المجموعة C المعادلتين التاليتين:

- $(E): \frac{1}{2} z^2 - 2z + \sqrt{3} = 0$
- $(E'): \left(t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right);\ z^2 + (2\sin t)z + 1 = 0$

تمرين 2

نعتبر في C المعادلة : $(E): z^3 + 2(\sqrt{3} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z - 8 = 0$

بين أن العدد 2 حل للمعادلة (E)

بين أن لكل z من C لدينا: $z^3 + 2(\sqrt{3} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z - 8 = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{3}\ z + 4)$

حل المعادلة (E)

الحصة رقم 18

XII. الترميز الأسي لعدد عقدي

1. ترميز

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث ، θ عدد حقيقي، لكل عدد عقدي معياره 1 و عمدته θ،
أي $e^{i\theta} = cos\theta + i\, sin\theta = [1, \theta]$

2. أمثلة

$$e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$$
$$e^{i\pi} = -1$$
$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$
$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. ملاحظات

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$$

4. خاصيات

لكل عددين حقيقيين θ و θ' و لكل عدد طبيعي n لدينا :

$$arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$$
$$|e^{i\theta}| = 1$$
$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$
$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$
$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ وهي صيغة موافر : formule de MOIVRE

5. حساب cos(nθ) وsin(nθ) باستعمال صيغة موافر

a. تطبيق 1 ص 234

بين أن :

- $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
- حدد بنفس الطريقة cos(3θ) و sin(3θ) بدلالة cosθ و sinθ

6. تعريف

z عدد عقدي غير منعدم معياره r و عمدته θ
الكتابة $z = r\, e^{i\theta}$ تسمى الكتابة الأسية ل z

7. أمثلة

الكتابة الأسية للعدد $-1 + i$ هي : $-1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$
الكتابة الأسية للعدد -3i هي $-3i = 3\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$
تحقق من ذلك

8. صيغتا أولير

لكل عدد حقيقي θ لدينا : $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$

الحصة رقم 19

XIII. تطبيقات

3. تمارين ص 235

الحصة رقم 20

4. إخطاط الحدوديات من cos(θ) وsin(θ) باستعمال صيغتي أولير

a. مثال

أخطط $\sin^4 x$ و $\cos^3 x$

b. الحل

لكل x من IR لدينا :

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

و منه:

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3$$

$$= \frac{1}{2^3}\left(\left(e^{ix}\right)^3 + 3\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right) + 3\left(e^{ix}\right)\left(e^{-ix}\right)^2 + \left(e^{-ix}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{2^3}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\right) + 3\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos(x)\right)$$

بكتابة $\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4$

نجد : $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$

5. تمرين

أخطط الحدودية المثلثية $P(x)=\cos^2(x).\sin^3(x)$
أوجد دالة أصلية للدالة $P(x)$

الحصة رقم 21

XIV. II. التمثيل العقدي لدوران

1. نشاط

نعتبر في المستوى العقدي الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$. لتكن M(z) نقطة من المستوى العقدي مختلفة عن O و النقطة M'(z') صورتها بالدوران r، لدينا :
$$\begin{cases} OM = OM' \quad (1) \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad (2) \end{cases}$$

1. **أول العلاقتين (1) و(2) باستعمال الأعداد العقدية.**
2. **استنتج أن** $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z \quad (E)$
3. **المتساوية (E) تسمى الكتابة العقدية للدوران** $r\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$
4. **نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي :** $z_A = \sqrt{3} - i$ **و** $z_B = \sqrt{3} + i$ **و** $z_C = 2i$
5. **بين أن r(A)=B و أن r(B)=C**
6. **استنتج أن الرباعي OABC معين**

2. الحل

3. خاصية

Ω نقطة من المستوى العقدي و لحقها العدد العقدي ω و θ عدد حقيقي
التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

4. برهان

5. أمثلة

التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه O أصل المعلم و زاويته : $\frac{2\pi}{3}$ هو : $z' = e^{\frac{i2\pi}{3}} \times z$

أي : $z' = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

هو $z' + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(z + 1 - i)$

أي : $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + \sqrt{2} - 1 + i$

6. تطبيق ص 237