الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقنية ـ سيدي قاسم	الأعداد العقدية (الجزء الأول)	المستوى : 2^ème^BAC
	Les nombres complexes	STE+STM+SP+SVT
الأستاذ : محمد اليمني		عدد الساعات : 10 ساعة

التوجيهات الرسمية

اعتبارات عامة :

- تعتبر الأعداد العقدية أداة لاستنتاج مختلف صيغ التحويل المثلثية ولحل معادلات من الدرجة الثانية وحل معادلات تؤول إلى المعادلات السابقة ولدراسة تشكلات هندسية من المستوى ولبعض التحويلات الاعتيادية في المستوى.
- كل تقديم أو بناء نظري للأعداد العقدية يعتبر خارج البرنامج.
- يعتبر حل المعادلة $az^2+bz+c=0$ من أجل c و b و a أعداد غير حقيقية خارج المقرر.
- يعتبر الحل العام للمعادلة $z^n=a$ خارج المقرر.
- ينبغي التركيز عل الحل العقدي لبعض المسائل الهندسية وتعويد التلاميذ على اختيار الأداة المناسبة لحل هذه المسائل من بين التحليلية والمتجهية والعقدية وعلى ترجمة المفاهيم الهندسية، وخاصة منها المسافة وقياس زاوية واستقامية النقط وتداور النقط، وذلك باستعمال الأعداد العقدية، وكذا على مختلف التطبيقات الجبرية للأعداد العقدية خصوصا: إخطاط الحدوديات المثلثية، صيغ التحويل المثلثية، حساب المجاميع، حل المعادلات الجبرية...

التوجيهات التربوية :

- ينبغي أن يتم التحسيس بضرورة إدخال الأعداد العقدية بشكل مختصر ومركز.
- نظرا لما يكتسيه التمثيل الهندسي من أهمية في ترسيخ مفهوم العدد العقدي فإن تناوله ينطلق مباشرة مع بداية الفصل ويواكب تقديم جل المفاهيم المقررة لبلورة التأويلات الهندسية لكل من المقابل والمرافق والمعيار والعمدة ومجموع عددين عقديين وجداء عدد عقدي في عدد حقيقي .
- يتم الربط بين معيار $z-z'$ والمسافة AB من جهة وعمدة $z-z'$ والزاوية المتجهية $(\vec{i};\overrightarrow{AB})$ من جهة ثانية حيث z و z' هما على التوالي لحقا النقطتين A و B. و $\vec{i}$ متجهة موجهة للمحور الحقيقي .
- يجب التركيز على ترجمة المفاهيم الهندسية، وخصوصا المسافة وقياس زاوية واستقامية النقط وتداور النقط ، إلى مصطلحات الأعداد العقدية .
- يتم التطرق إلى حل معالات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في $\mathbb{C}$ معاملاتها أعداد حقيقية .
- تعتبر المعادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها أعداد عقدية غير حقيقية خارج البرنامج

أهداف الدرس

تعرف عدد عقدي .	توظيف الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية .
تعرف المجموعة $\mathbb{C}$.	التمكن من إعطاء تأويلات هندسية لأعداد عقدية (المجموع ؛ ضرب عدد حقيقي في عدد عقدي ...)
التمكن من تمثيل صورة عدد عقدي هندسيا	ترجمة مفاهيم هندسية إلى لغة الأعداد العقدية (منتصف قطعة ؛ الاستقامية ؛ تساوي متجهتين ...)
تحديد لحق نقطة ولحق متجهة .	
تعرف الكتابة الجبرية لعدد عقدي .	
تعرف مرافق ومعيار عدد عقدي .	
تعرف شكل مثلثي لعدد عقدي .	

الامتدادات

الحساب التكاملي	الهندسة
الكهرباء والميكانيك	علوم المهندس

القدرات المنتظرة	
⮚ التمكن من الحساب على الأعداد العقدية؛ ⮚ الانتقال من الكتابة الجبرية إلى الكتابة المثلثية لعدد عقدي والعكس .	⮚ تطبيق الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية (الاستقامية ، التعامد ، ...) ⮚ التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي والدوران

فقرات الدرس	
I ـ المجموعة $\mathbb{C}$: -الكتابة الجبرية لعدد عقدي ؛ -تساوي عددين عقديين ؛ II ـ التمثيل الهندسي لعدد عقدي :لحق نقطة؛ لحق متجهة؛ -	III ـ العمليات على الأعداد العقدية . IV ـ مرافق عدد عقدي V ـ معيار عدد عقدي؛ عمدة عدد عقدي غير منعدم؛ الشكل المثلثي ؛ زاوية متجهتين وعمدة خارج لحقيهما،استقامية ثلاث نقطة ؛

I ـ تقديم الأعداد العقدية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر المعادلة $(E): x^3 - 15x - 4 = 0$

1) بين أن المعدلة (E) تقبل حلا حقيقيا .

2) تحقق أنه إذا كان u و v عددان حقيقيان $u^3 + v^3 = 4$ و $uv = 5$ فإن $u+v$ حل للمعادلة (E) .

3) ليكن u و v العددين الحقيقيين الذين تحققان $u^3 + v^3 = 4$ و $uv = 5$.

أ ـ بين أن : u^3 و v^3 هما حلا المعادلة : $(E_1): x^2 - 4x + 125 = 0$.

ب ـ تحقق من أن : $x^2 - 4x + 125 = (x-2)^2 + 121$.

لحل المعادلة (E) استعمل العالم الرياضي بومبيللي (Bombelli) العددين التخيليين مربعيهما -1 رمز لهما العالم السوسيري أولير(Euler) بالرمزين i و $-i$ (حيث $i^2 = -1$)

المعادلة $(E): x^3 - 15x - 4 = 0$ تسمى معادلة بومبيللي .

ج ـ باستعمال الرمز i وبتطبيق نفس خاصيات الجمع والضرب في IR ، بين أن حلي المعادلة (E_1) هما $2+11i$ و $2-11i$.

د ـ بتعويض i^2 بالعدد -1 وباستعمال جميع قواعد الحساب في IR تحقق أن : $(2-i)^3 = 2-11i$ و $(2+i)^3 = 2+11i$.

هـ ـ بوضع $u = 2+i$ و $v = 2-i$ بين أن $u+v$ حل للمعادلة (E) .

وهكذا عن طريق أعداد تخيلية استطاع بومبيللي تحديد حل حقيقي للمعادلة (E) .

1) تعريف :

مجموعة الأعداد العقدية هي المجموعة التي نرمز لها ب $\mathbb{C}$ ، وتتضمن مجموعة الأعداد الحقيقية IR ، وتحتوي على عنصر غير حقيقي i يحقق $i^2 = -1$ ، ولكل عنصر z من $\mathbb{C}$ يوجد زوج وحيد $(a;b)$ من عددين حقيقيين بحيث : $z = a + ib$.

2) اصطلاحات :

- الكتابة : $z = a + ib$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z (أو الشكل الديكارتي للعدد العقدي z أو الكتابة الجبرية للعدد العقدي z) .
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد العقدي z ونرمز له بالرمز: $\mathrm{Re}(z)$ (partie réelle de z).
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد العقدي z ونرمز له بالرمز: $\mathrm{Im}(z)$ (partie imaginaire de z)
- العدد العقدي ib بحيث $b \in IR$ يسمى عددا تخيليا صرفا (nombre imaginaire pur) .

3) خاصيات :

ليكن z عددا عقديا .

1. يكون z عددا حقيقيا إذا وفقط إذا كان : $\mathrm{Im}(z) = 0$.
2. يكون z عددا تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان : $\mathrm{Re}(z) = 0$.

3. ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ عددين عقديين . لدينا :

$z = z' \Leftrightarrow a = a'$ و $b = b'$

$z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ و $b = 0$

II – التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

1) لحق نقطة : Affixe d'un point

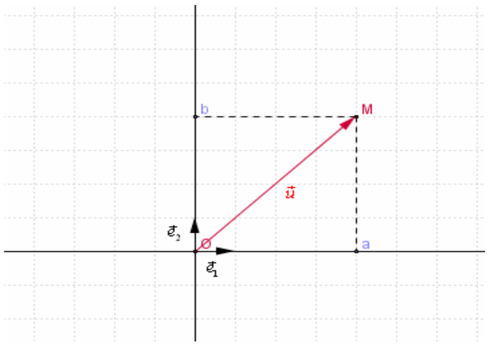
نعتبر المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ متعامد ممنظم .

نعلم أن لكل نقطة M من (P) يوجد زوج وحيد $(a;b)$ من عددين حقيقيين حيث : $(a;b)$ هو زوج إحداثيتي M في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

إذن يوجد عدد عقدي وحيد z بحيث : $z = a + ib$.

العدد $z = a + ib$ يسمى لحق النقطة M ونكتب : z_M

النقطة M تسمى صورة العدد العقدي z ونكتب $M(z)$.



ملاحظات :

- صور الأعداد الحقيقية تكون محور الأفاصيل في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ ويسمى المحور الحقيقي .
- صور الأعداد التخيلية الصرفة تكون محور الأراتيب في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ ويسمى المحور التخيلي .
- كل عدد عقدي $z = a + ib$ يربط بنقطة وحيدة M من (P) زوج إحداثيتيها $(a;b)$.
- المستوى (P) المزود بالمعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ المتعامد الممنظم المباشر يسمى المستوى العقدي .

2) لحق متجهة :

تعريف :

لحق متجهة $\vec{w}$ هو لحق النقطة N بحيث : $\overrightarrow{ON} = \vec{w}$ أي : إذا كان $\vec{w}(a;b)$ فإن لحق المتجهة $\vec{w}$ هو $z = a + ib$.

ملاحظة :

إذا كان z هو لحق النقطة M فإن z هو لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$.

خاصيات :

1. إذا كان z_1 و z_2 هما لحقا المتجهتين $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ فإن لحق المتجهة $\vec{u_1} + \vec{u_2}$ هو $z_1 + z_2$.
2. إذا كان z هو لحق المتجهة $\vec{u}$ فان لحق المتجهة $\alpha\vec{u}$ ؛ $(\alpha \in IR)$ هو $\alpha.z$
3. إذا كان z_A هو لحق النقطة A و z_B هو لحق النقطة B فإن لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو $z_B - z_A$.

لحق I منتصف القطعة $[AB]$ هو : $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$.

4. لتكن z_A و z_B و z_C على التوالي ألحاق النقط A و B و C على التوالي .

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كان : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ عددا حقيقيا .

تمرين :

نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A و B و C ألحاقها على التوالي $z_A = 4 + 2i$ و $z_B = -5 - i$ و $z_C = 1 + i$.

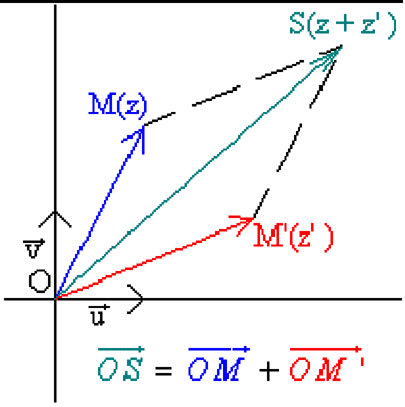
بين أن النقط A و B و C مستقيمية .

III ـ العمليات في $\mathbb{C}$:

أ ـ الجمع في $\mathbb{C}$:

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ عددين عقديين .
نعرف مجموع z و 'z ب :
. $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
الجمع في $\mathbb{C}$ يملك نفس خاصيات الجمع في IR

التأويل الهندسي لمجموع عددين عقديين :



ب ـ فرق عددين عقديين :

كما في IR نعرف فرق عددين عقديين z و 'z ب : $z - z' = z + (-z')$

ج ـ الضرب في $\mathbb{C}$:

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ عددين عقديين .
جداء العددين العقديين z و 'z هو العدد العقدي : $zz' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.
الضرب في $\mathbb{C}$ يملك نفس خاصيات الضرب في IR .

د ـ مقلوب عدد عقدي غير منعدم

ليكن $z = a + ib$ عدد عقدي غير منعدم : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

هـ ـ خارج عددين عقديين :

كما في IR نعرف خارج عددين عقديين z و 'z حيث $z' \neq 0$ ب : $\frac{z}{z'} = z \times \left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} + \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}i$.

ملاحظة : لا داعي لتعريف علاقة الترتيب في $\mathbb{C}$ ولا مفهومي عدد موجب وعدد سالب في $\mathbb{C}$ ، وذلك لعدم انسجامهما مع عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{C}$.

خاصيات :

لكل عددين عقديين z و 'z لدينا :

1. $z' = 0$ أو $z = 0 \Leftrightarrow zz' = 0$.
2. $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$.
3. $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$.
4. $(z - z')^3 = z^3 - 3z^2z' + 3zz'^2 - z'^3$
5. $z^2 - z'^2 = (z + z')(z - z')$.
6. $z^3 - z'^3 = (z - z')(z^2 + zz' + z'^2)$
7. $(z + z')^3 = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$
8. $z^n - z'^n = (z - z')(z^{n-1} + z^{n-2}z' + z^{n-3}z^2 + ... + z^{n-1})$

IV ـ مرافق عدد عقدي :

1) تعريف :

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا ($a \in IR$ و $b \in IR$) .
العدد العقدي $a - ib$ يسمى مرافق العدد العقدي z ونرمز له بالرمز $\bar{z}$.
نقول إن العددين $z = a + ib$ و $\bar{z} = a - ib$ مترافقان .

2) **خاصيات :**

1 ـ إذا كان z هو لحق نقطة M و $\bar{z}$ هو لحق نقطة 'M فإن : M و 'M متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي (محور الأفاصيل).

2 ـ ليكن z عددا عقديا . $z \in IR \Leftrightarrow z = \bar{z}$ و $z \in iIR \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ (iIR هي مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة) .

3 ـ ليكن z و'z عددان عقديان و α عددا حقيقيا . لدينا :

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ ؛ $\overline{\alpha\times z}=\alpha\times\overline{z}$ ؛ $\overline{(-z)}=-\overline{z}$

$\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$ ؛ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ ؛ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$\forall z\in C;\forall n\in Z:\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$.

V ــ معيار وعمدة عدد عقدي :

1) معيار عدد عقدي : Module d'un nombre complexe

أ ــ تعريف :

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا ، لدينا $\overline{z}=a-ib$ و $z\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

إذن : $z\overline{z}$ عدد حقيقي موجب .

العدد $\sqrt{z\overline{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي z ونرمز له بالرمز : $|z|$.

لدينا : $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

ب ــ التأويل الهندسي لمعيار عدد عقدي :

- لتكن M نقطة لحقها $z=a+ib$. لدينا : $OM=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$
- إذا كانت $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ فإن : $\|\vec{u}\|=|z|$.
- لتكن A و B نقطتين من (P) لحقاهما على التوالي z_A و z_B . لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو العدد العقدي $z_B - z_A$.
  $\|\overrightarrow{AB}\|=d(A;B)=AB=|z_B-z_A|$.

ب ــ خاصيات :

لكل عددين عقديين z و 'z لدينا :

1. $|z|=0\Leftrightarrow z=0$
2. $|z|$ عدد حقيقي موجب
3. $|z\times z'|=|z|\times|z'|$.
4. $|\alpha.z|=|\alpha|.|z|$ حيث α عدد حقيقي
5. $|z^n|=|z|^n$ لكل n من Z .

2) عمدة عدد عقدي غير منعدم :

تعريف :

ليكن z عددا عقديا و M صورته في المستوى العقدي .

عمدة العدد العقدي z هو أحد قياسات الزاوية الموجهة $(\overline{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$ ونرمز له بالرمز $\arg z$ ؛ ونكتب : $\arg z\equiv(\overline{\vec{u};\overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$