I- تقديم المجموعة $\mathbb{C}$:

1)- مبرهنة و تعريف:

توجد مجموعة يرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ تتضمن المجموعة $\mathbb{R}$ و تحتوي على عنصر غير حقيقي i بحيث $i^2=-1$ و لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ يوجد زوج وحيد (a,b) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $z=a+ib$.

- **إصطلاحات:**

عناصر المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى أعدادا عقدية و الشكل $z=a+ib$ يسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z ، العدد a يسمى الجزء الحقيقي ل z و b يسمى الجزء التخيلي نكتب :

$a=\mathrm{Re}(z)$ و $b=\mathrm{Im}(z)$.

إذا كان $a=0$ و $b\neq 0$ فإن $z=ib$ يسمى عددا عقديا تخيليا صرفا ، و هو عنصر من مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة $i\mathbb{R}^*$ ، إذن : $i\mathbb{R}^*=\{ib/b\in\mathbb{R}^*\}$.

- **تساوي عددين عقديين:**

لكل (z,z') من $\mathbb{C}^2$ لدينا : $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$ و $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \Leftrightarrow z=z'$

و بصفة خاصة : $z=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=0$

2)- الجمع و الضرب في $\mathbb{C}$:

- **تعريف:**

يمكن تمديد عمليتي الجمع و الضرب في $\mathbb{R}$ إلى المجموعة $\mathbb{C}$ بالكيفية التالية :

لكل $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$ نضع :

$z+z'=(a+a')+i(b+b')$ و $z.z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.

- **ملحوظة:**

الجمع في $\mathbb{C}$ تجميعي ، تبادلي و يقبل عنصرا محايدا هو 0 و لكل عدد عقدي $z=a+ib$ مقابل هو : $-z=-a-ib$.

و الضرب في $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ تجميعي ، تبادلي و يقبل عنصرا محايدا هو 1 و لكل عدد عقدي غير منعدم $z=a+ib$ مقلوب هو : $\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$.

و الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $\mathbb{C}$ أي أن :

$z.(z'+z'')=z.z'+z.z''$ مهما يكن المثلوث (z,z',z'') من $\mathbb{C}^3$.

نعبر عن خاصيات الجمع و الضرب في $\mathbb{C}$ بقولنا أن $(\mathbb{C},+,.)$ جسم تبادلي .

- **خاصية01:**

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ لدينا : $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

و لكل عددين عقديين $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ بحيث $z'\neq 0$ لدينا :

$\frac{z}{z'}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+i\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}$.

- **تمرين01:**

أ- أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية :

$z_0=(2+3i)(3-4i)$ و $z_1=i(1-2i)^3$ و $z_2=(2+i)^3+(1-2i)^3$

و $z_3=\frac{5+3\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$ و $z_4=\left(\frac{2-3i}{3+2i}\right)^3$ و $z_5=\frac{(1+i)^3}{1-i}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$.

ب- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا ، أكتب على الشكل الجبري i^{4n} و i^{4n+1} و i^{4n+2} و i^{4n+3} ثم إستنتج i^{2006} و i^{2007} و i^{2008} و i^{2009} .

ج- حدد المجموعين : S_1 و S_2 ، حيث $S_1=\sum_{k=0}^{2009}i^k$ و $S_2=\sum_{k=0}^{2010}(-i)^k$.

3)- مرافق عدد عقدي:

- **تعريف:**

ليكن $z=a+ib$ عنصرا من $\mathbb{C}$ ، العدد العقدي $a-ib$ يسمى مرافق z و يرمز له بالرمز $\overline{z}$ ، إذن $\overline{z}=a-ib$.

- **ملحوظة:**

لكل z من $\mathbb{C}$ لدينا : $\overline{\overline{z}}=z$ ، هذا يعني أن التطبيق $\varphi:z\in\mathbb{C}\mapsto\overline{z}\in\mathbb{C}$ تقابل تقابله العكسي نفسه ، بمعنى أن : $\varphi^{-1}=\varphi$.

- **تمرين02:**

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):z^2-4\overline{z}+4=0$.

- **خاصية02:**

مهما يكن z من $\mathbb{C}$ لدينا : $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ و $b=\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$.

إذن : $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow\overline{z}=z$ و $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow\overline{z}=-z$.

لكل عددين عقديين z_1 و z_2 لدينا :

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ و $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$ و إذا كان $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن : $\overline{\alpha.z_1}=\alpha.\overline{z_1}$.

و إذا كان $z_2\neq 0$ فإن : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ و $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}=\frac{1}{\overline{z_2}}$.

و بصفة خاصة ، لكل z من $\mathbb{C}^*$ و لكل n من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$.

II- التمثيل الهندسي و معيار عدد عقدي:

المستوى المتجهي V_2 منسوب إلى أساس متعامد و ممنظم $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ و المستوى الموجه (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

$M(x,y)$ تشير إلى النقطة M و زوج إحداثيتيها (x,y) في المعلم $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

1)- صورة عدد عقدي و لحق نقطة أو متجهة:

- **تعريف01:**

لكل عدد عقدي $z=x+iy$ النقطة $M(x,y)$ تسمى صورة العدد z

و عكسيا ، لكل نقطة $M(x,y)$ من (P) العدد العقدي $z=x+iy$ يسمى لحق النقطة M

نكتب : $z=aff(M)$ أو باختصار $M(z)$.

المستقيم $\left(O,\vec{e_1}\right)$ يسمى المحور الحقيقي ، $\left(O,\vec{e_2}\right)$ يسمى المحور التخيلي و (P) يسمى المستوى العقدي .

- **ملحوظة:**

لدينا : $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(Ox)$ و $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(Oy)$.

و بصفة خاصة : $z\in\mathbb{R}_+\Leftrightarrow M(z)\in[Ox)$ و $z\in\mathbb{R}_-\Leftrightarrow M(z)\in[Ox')$

$z\in i\mathbb{R}_+\Leftrightarrow M(z)\in[Oy)$ و $z\in i\mathbb{R}_-\Leftrightarrow M(z)\in[Oy')$.

- **تعريف02:**

لكل عدد عقدي $z=x+iy$ المتجهة $\vec{u}(x,y)$ تسمى صورة العدد z ، و عكسيا لكل متجهة $\vec{u}(x,y)$ من V_2 العدد العقدي $z=x+iy$ يسمى لحق $\vec{u}$ و نكتب : $z=aff\left(\vec{u}\right)$.

إذن لكل نقطة M من (P) لدينا : $aff\left(\overrightarrow{OM}\right)=aff(M)$.

- **خاصية03:**

مهما تكن المتجهتان $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ و العددان الحقيقيان α و β لدينا :

$aff\left(\vec{u_1}+\vec{u_2}\right)=aff\left(\vec{u_1}\right)+aff\left(\vec{u_2}\right)$ و $aff\left(\alpha\vec{u_1}\right)=\alpha.aff\left(\vec{u_1}\right)$

و بصفة عامة : $aff\left(\alpha\vec{u_1}+\beta\vec{u_2}\right)=\alpha.aff\left(\vec{u_1}\right)+\beta.aff\left(\vec{u_2}\right)$.

و لكل نقطتين A و B من المستوى العقدي (P) لدينا :

$aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=aff\left(\overrightarrow{OB}\right)-aff\left(\overrightarrow{OA}\right)=aff(B)-aff(A)$.

- **خاصية04:**

إذا كانت النقطة G مرجحا للنظمة المتزنة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$

فإن : $aff(G)=\frac{\alpha.aff(A)+\beta.aff(B)}{\alpha+\beta}$.

بصفة خاصة إذا كان I هو منتصف $[AB]$ فإن : $aff(I)=\frac{aff(A)+aff(B)}{2}$.

- **ملحوظة:**

الرباعي الذي رؤوسه النقط $M(z)$ و $M\left(\overline{z}\right)$ و $M(-z)$ و $M\left(-\overline{z}\right)$ مستطيل مركزه النقطة O مهما يكن z من $\mathbb{C}-(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$.

و يكون هذا المستطيل مربعا إذا و فقط إذا كان : $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$.

2)- معيار عدد عقدي:

- **تعريف:**

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا و M نقطة من (P) لحقها z

العدد الموجب $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$ يسمى معيار العدد العقدي z و يرمز له بالرمز $|z|$

إذن : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

- **ملحوظة:**

مهما يكن $z=x+iy$ من $\mathbb{C}$ لدينا : $z.\overline{z}=x^2+y^2$ ، إذن : $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}$

و من جهة أخرى ، لكل نقطتين A و B من (P) لدينا : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=|z_B-z_A|$.

• **خاصية05:**

مهما يكن z من $\mathbb{C}$ لدينا :

$|\overline{z}|=|-\overline{z}|=|-z|=|z|$ و $\mathrm{Re}(z)\le|\mathrm{Re}(z)|\le|z|$ و $\mathrm{Im}(z)\le|\mathrm{Im}(z)|\le|z|$.

$|z|=0\Leftrightarrow z=0$ و $|z|=1\Leftrightarrow z^{-1}=\overline{z}$.

و لكل عددين عقديين z_1 و z_2 لدينا :

$|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$ و $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ و $|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

و إذا كان $z_2\neq0$ فإن : $\left|\frac{1}{z_2}\right|=\frac{1}{|z_2|}$ و $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

• **تمرين02:**

أ- حدد معيار العدد العقدي z حيث : $z=\frac{3i(3-4i)^2}{(\sqrt{5}-2i)(1+\sqrt{3}i)^3}$.

ب- لكل z من $\mathbb{C}-\{2i\}$ نضع : $z'=\frac{z-3}{z-2i}$.

حدد ثم أنشىء في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ المجموعات التالية :

$(\Gamma_1)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/z'\in\mathbb{R}\}$ و $(\Gamma_2)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/z'\in i\mathbb{R}\}$

و $(\Gamma_3)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/|z'|=1\}$.

ج- لكل z من $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ نضع : $z''=\frac{2z-i}{z-\overline{z}}$.

حدد ثم أنشىء في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ المجموعتين :

$(\Sigma_1)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/z''\in i\mathbb{R}\}$ و $(\Sigma_1)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/|z''|=1\}$.

• **تمرين03:**

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين :

$(E_1):z^2+2|z|^2-3=0$ و $(E_2):z+3\overline{z}=(2+\sqrt{3}i)|z|$.

III- الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1)- عمدة عدد عقدي غير منعدم:

• **تعريف:**

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M نقطة من (P) لحقها z ، كل قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{e_1},\overrightarrow{OM}})$ يسمى عمدة العدد العقدي z و يرمز له بالرمز $\arg(z)$

إذن : $\arg(z)\equiv(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM})[2\pi]$.

• **حالات خاصة:**

مهما يكن z من $\mathbb{C}^*$ لدينا :

$z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv0[2\pi]$ و $z\in\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\pi[2\pi]$

و بصفة عامة : $z\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv0[\pi]$.

$z\in i\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $z\in i\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و بصفة عامة : $z\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$.

• **خاصية06:**

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب بكيفية وحيدة على شكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

حيث : $r=|z|$ و $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$.

نكتب باختصار $z=[r,\theta]$ و تسمى هذه الكتابة بالشكل المثلثي للعدد العقدي z .

• **ملحوظة:**

إذا كان $z=x+iy$ فإن :

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ و θ عدد حقيقي بحيث : $\cos\theta=\frac{x}{r}$ و $\sin\theta=\frac{y}{r}$.

• **خاصية07:**

لكل (x,y) من $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ لدينا : $x=[x,0]$ و $iy=\left[y,\frac{\pi}{2}\right]$.

و لكل (x,y) من $]-\infty,0[\times]-\infty,0[$ لدينا : $x=[-x,\pi]$ و $iy=\left[-y,-\frac{\pi}{2}\right]$.

- **خاصية08:**

لكل عددين عقديين غير منعدمين z_1 و z_2 لدينا :

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1|=|z_2| \\ \arg(z_1)\equiv\arg(z_2)[2\pi] \end{cases}$$

$\arg(z_1.z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)[2\pi]$

و $\arg(z^n)\equiv n.\arg(z)[2\pi]$ لكل z من $\mathbb{C}^*$ و n من $\mathbb{Z}$.

وبصفة خاصة : $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$ و $\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$

و لدينا أيضا : $\arg(\overline{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$ (لأن $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$) .

- **ملحوظة:**

إذا كان $\alpha>0$ فإن :

$\arg(\alpha.z)\equiv\arg(z)[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{\alpha}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$

أما إذا كان $\alpha<0$ فإن :

$\arg(\alpha.z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{\alpha}{z}\right)\equiv\pi-\arg(z)[2\pi]$.

- **تمرين04:**

أ- حدد معيار و عمدة العدد العقدي $z_0=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ ، ثم إستنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ب- أكتب على الشكل المثلثي العددين العقديين $z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}$ و $z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{4}$ ، ثم

إستنتج معيار و عمدة العددين العقديين : $u=z_1+z_2$ و $v=z_1-z_2$.

ج- أ- نعتبر العدد العقدي $z=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

أحسب z^2 و حدد معياره و عمدته ، ثم إستنتج معيار و عمدة z .

- **تمرين05:**

أ- أكتب تبعا لقيم العدد θ من المجال $]-\pi,\pi[$ الشكل المثلثي للعدد العقدي z_θ حيث :

$z_\theta=1-\cos\theta+i\sin\theta$.

ب- أكتب تبعا لقيم العدد α الشكل المثلثي للعدد العقدي z_α حيث : $z_\alpha=\frac{1}{1+i\tan\alpha}$

و $\alpha\in[-\pi,\pi[-\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$.

ج- حدد مجموعة قيم العدد الصحيح النسبي n التي يكون من أجلها على التوالي :

$(1):\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}_+^*$ ، $(2):\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}_-^*$ و $(3):\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in i\mathbb{R}^*$.

د- حدد ثم أنشىء في المستوى العقدي (P) المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ التي تحقق :

$\arg(z-2i+1)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2)- الزاوية الموجهة لمتجهتين و عمدة خارج لحقيهما:

- **خاصية09:**

لكل نقطتين مختلفتين A و B من (P) لدينا : $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\arg(z_B-z_A)[2\pi]$

و لكل أربع نقط A و B و C و D من (P) بحيث : $A\neq B$ و $C\neq D$ لدينا :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$$

و بصفة خاصة إذا كانت A و B و C ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من (P) فإن :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi] .$$

- **إستنتاجات:**

لتكن A و B و C ثلاث نقط من (P) مختلفة مثنى مثنى .

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}^*$.

ويكون المثلث ABC قائم الزاوية في A إذا و فقط إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

ويكون المثلث ABC قائما و متساوي الساقين رأسه A إذا وفقط إذا كان: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$.

ويكون المثلث ABC متساوي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm\frac{\pi}{3}\right]$.

- **تمرين06:**

أ- نعتبر النقط $A(2+3i)$ و $B(4-i)$ و $C(10+2i)$.

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في B .

ب- بين أن المعادلة $(E): z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{C}$ ثلاث حلول ، و حدد طبيعة المثلث ABC الذي ألحاق رؤوسه حلول المعادلة (E) .

ج- حدد ثم أنشىء المجموعة (Σ) للنقط $M(z)$ من المستوى العقدي (P) التي تكون من أجلها النقط $M(z)$ و $N(i\bar{z})$ و $P(-3i)$ مستقيمية .

- **خاصية10:**

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع (هذا يعني أن : $z_B - z_A = z_C - z_D$) .

يكون $ABCD$ مستطيلا إذا و فقط إذا كان : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

و يكون $ABCD$ معينا إذا و فقط إذا كان : $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

و يكون مربعا إذا و فقط إذا كان : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ و $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

- **تمرين07:**

أ- نعتبر النقط $A(2i)$ و $B(\sqrt{3}+i)$ و $C(\sqrt{3}-i)$.

بين أن الرباعي $OABC$ معين .

ب- نعتبر النقط $A(-2+5i)$ و $B(3+2i)$ و $C(6+7i)$ و $D(1+10i)$.

بين أن الرباعي $ABCD$ مربع .

IV- المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$:

1)- حل المعادلة $z^2 = a$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$:

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $(E): z^2 = a$ في $\mathbb{C}$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$.

- إذا كان $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإن : $S = \left\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right\}$

- إذا كان $a \in \mathbb{R}_-^*$ فإن : $(E) \Leftrightarrow z^2 = \left(i\sqrt{-a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(z + i\sqrt{-a}\right)\left(z - i\sqrt{-a}\right) = 0$

إذن : $S = \left\{-i\sqrt{-a}, i\sqrt{-a}\right\}$.

نقول إن العددين العقديين $z_1 = -i\sqrt{-a}$ و $z_2 = i\sqrt{-a}$ هما الجذرين المربعين للعدد الحقيقي السالب a .

- إذا كان $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ أي أن $a \notin \mathbb{R}$ ،

نضع : $a = \alpha + i\beta$ حيث $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ و $z = x + iy$

إذن : $(E) \Leftrightarrow (x+iy)^2 = \alpha + i\beta \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta$

أي أن : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$.

و بما أن $z^2 = a$ فإن : $|z|^2 = |a|$ أي أن : $x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

و بالتالي فإن : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1): x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ (2): x^2 - y^2 = \alpha \\ (3): 2xy = \beta \end{cases}$.

لاحظ أن $\beta \in \mathbb{R}^*$ و أن إشارته تحدد ما إذا كان ل x و y نفس الإشارة أو إشارة مختلفة .

نستعمل المعادلتين (1) و(2) فنحصل على :

$$x^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} > 0 \quad \text{و} \quad y^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} > 0$$

إذن :

$$x = \pm\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \quad \text{و} \quad y = \pm\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}$$

ثم نستعمل المعادلة (3) : $\beta < 0 \Rightarrow xy < 0$ و $\beta > 0 \Rightarrow xy > 0$.

- **مبرهنة:**

لكل عدد عقدي غير منعدم a جذرين مربعين متقابلان هما حلي المعادلة $(E):z^2=a$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

- **أمثلة:**

- للعدد الحقيقي السالب $a=-4$ جذرين مربعين عقديين (تخيليين صرفين) هما : $z_1=-2i$ و $z_2=2i$.

الجذرين المربعين للعدد -8 هما : $z_1=-2\sqrt{2}i$ و $z_2=2\sqrt{2}i$.

- لنحدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $a=4-3i$:

نضع : $z=x+iy$ ، إذن :
$$z^2=4-3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{4^2+(-3)^2} \\ x^2-y^2=4 \\ 2xy=-3 \end{cases}$$

بمعنى أن : $2x^2=9$ و $2y^2=1$ و $xy<0$.

أي : $(x,y)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(x,y)=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

إذن الجذرين المربعين ل $a=4-3i$ هما : $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-i)$ و $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-3+i)$.

- لتحديد الجذرين المربعين للعدد $a=1+\sqrt{3}i$ ، نكتب a على الشكل المثلثي :

$a=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و نضع : $z=[r,\theta]$ ، إذن : $z^2=a \Leftrightarrow [r^2,2\theta]=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$

و هذا يعني أن : $r^2=2$ و $2\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي أن : $r=\sqrt{2}$ و $\theta\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$.

إذن الجذرين المربعين ل a هما : $z_1=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{6}\right]$ و $z_2=\left[\sqrt{2},-\frac{5\pi}{6}\right]$

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$ و $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$.

- **تمرين08:** حدد الجذرين المربعين للعددين العقديين : $u=1-2\sqrt{3}i$ و $v=-5+12i$.

2)- حل المعادلة $(E):az^2+bz+c=0$ **حيث** $a\in\mathbb{C}^*$ **و** $(b,c)\in\mathbb{C}^2$:

مهما يكن z من $\mathbb{C}$ لدينا : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ حيث $\Delta=b^2-4ac$

إذا كان $\Delta=0$ فالمعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $z_0=-\frac{b}{2a}$.

و إذا كان $\Delta\neq 0$ فإنه يقبل جذرين مربعين δ و $-\delta$ (عقديين في حالة $\Delta\in\mathbb{C}-\mathbb{R}_+$)

و لدينا : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]$.

إذن : $(E)\Leftrightarrow a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)=0$

و المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما : $z_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ و $z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$.

- **ملخص:**

لتكن S مجموعة حلول المعادلة : $(E):az^2+bz+c=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

و $\Delta=b^2-4ac$ مميزها .

إذا كان $\Delta=0$ فإن : $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

و إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن $S=\left\{\frac{-b-\delta}{2a},\frac{-b+\delta}{2a}\right\}$ ، حيث δ هو أحد جذري المميز Δ .

- **ملحوظة:**

إذا كانت معاملات المعادلة (E) أعداد حقيقية و كان $\Delta<0$ فإن أحد جذري Δ هو $\delta=i\sqrt{-\Delta}$ و حلي المعادلة (E) عددين عقديين مترافقين و هما :

$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ($z_2=\overline{z_1}$)

- **تمرين09:**

حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

$(1):z^2-30z+289=0$ و $(2):z^2-6z+9-6i=0$

$(3): iz^2+(2i-1)z-\left(1+\frac{i}{4}\right)=0$ و $(4): (1+i)z^2-3z+2(1-i)=0$

و $(5): z^2-2i.z+\left(1+2\sqrt{3}i\right)=0$.

- **تمرين10:**

أ- لتكن S_1 مجموعة حلول المعادلة : $(E_1): z^4+16=0$ ، و S_2 مجموعة حلول المعادلة : $(E_2): (z-2i)^4+16=0$.

حدد S_1 ثم إستنتج S_2 ، ثم بين صور S_2 في المستوى العقدي (P) رؤوس لمربع يتم إنشائه .

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_3): z^4-2z\cos\theta+1=0$ حيث $0<\theta<\pi$.

ج- بين أن المعادلة : $(E): z^2-2(\lambda\cos\theta+i\sin\theta)z+1-\lambda^2=0$ تقبل حلين مختلفين z_1 و z_2 يتم تحديدهما (لكل (λ,θ) من $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$) ، ثم أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

V- صيغة موافر - الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم:

1)- صيغة الحدانية و مثلث باسكال:

مهما يكن العددين العقديين z_1 و z_2 لدينا : $(z_1+z_2)^2=z_1^2+z_1.z_2+z_2^2$

و $(z_1+z_2)^3=z_1^3+3z_1^2.z_2+3z_1.z_2^2+z_2^3$.

هاتين المتطابقتين يمكن تعميمهما ، باستعمال جدول يسمى مثلث باسكال :

1
$1-1$
$1-2-1$
$1-3-3-1$
$1-4-6-4-1$
$1-5-10-10-5-1$
$1-6-15-20-15-6-1$

و لاحظ أنه في نشر المتطابقتين السابقتين إستعملت معاملات السطر الثالث و الرابع على التوالي .

لننشر مثلا $(z_1+z_2)^4$ و $(z_1+z_2)^5$ باستعمال مثلث باسكال .

نحصل على معاملات نشر $(z_1+z_2)^4$ و $(z_1+z_2)^5$ إنطلاقا من السطر الخامس و السادس على التوالي :

إذن : $(z_1+z_2)^4=z_1^4+4z_1^3.z_2+6z_1^2.z_2^2+4z_1.z_2^3+z_2^4$

و $(z_1+z_2)^5=z_1^5+5z_1^4.z_2+10z_1^3.z_2^2+10z_1^2.z_2^3+5z_1.z_2^4+z_2^5$.

- **صيغة الحدانية:**

لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 2$ و لكل عددين عقديين z_1 و z_2 لدينا :

$$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k z_1^{n-k}.z_2^k \quad \text{و} \quad (z_1-z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k z_1^{n-k}.z_2^k$$

حيث الأعداد C_n^k هي معاملات السطر $n+1$ في مثلث باسكال .

- **تمرين11:**

أنشر $(z+2i)^7$ و $(z-2i)^6$ و $(z+1)^{10}$ و $(z-1)^{10}$.

2)- صيغة موافر:

- **خاصية11:**

لكل θ من $\mathbb{R}$ و لكل n من $\mathbb{Z}$ لدينا : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

- **تمرين12:**

أحسب : $\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{2007}$ و $\left(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{-370}$.

- **ملحوظة:**

إذا كان : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ فإن : $\forall n\in\mathbb{Z}: z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

- **مثال:**

أكتب على الشكل المثلثي العدد $z=\sqrt[6]{243}+i\sqrt[3]{3}$ ، ثم إستنتج z^{-9} .

- **تطبيقات:** **حساب** $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ حيث $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$:

لدينا من جهة : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ (صيغة موافر)

و من جهة أخرى : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n}i^k C_n^k \cos^{n-k}\theta\sin^k\theta$ (صيغة الحدانية)

و منهما معا نستنتج أن :

$\cos n\theta = \mathrm{Re}(Z)$ و $\sin n\theta = \mathrm{Im}(Z)$ ، حيث $Z = \sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta$.

و لاحظ أنه يجب إستعمال مثلث باسكال لتحديد المعاملات C_n^k حيث $0 \le k \le n$.

• **تمرين13:**

بين أن : $\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$

و $\sin 5\theta = \sin^5\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos^4\theta$.

3)- **الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم:**

نعلم أنه لكل عدد عقدي غير منعدم z يوجد زوج وحيد (r,θ) من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ بحيث :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، حيث $r = |z|$ و $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.

نضع : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

فيصبح لدينا : $z = re^{i\theta}$ و تسمى هذه الكتابة كتابة على الشكل الأسي للعدد العقدي z .

• **أمثلة:**

$-1 = e^{i\pi}$ و $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و $1-i = \sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $3-\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{6}}$.

• **خاصية12:**

لكل عددين عقديين غير منعدمين $z_1 = r_1.e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2.e^{i\theta_2}$

لدينا : $z_1.z_2 = r_1r_2.e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ و $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

و لكل $z = r.e^{i\theta}$ من $\mathbb{C}^*$ و n من $\mathbb{Z}$ لدينا : $z^n = r^n.e^{in\theta}$.

4)- **صيغتا أولير و إخطاط $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ حيث $n \ge 2$:**

• **خاصية13:** (صيغتا أولير)

لكل θ من $\mathbb{R}$ لدينا : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

و بصفة عامة : $\cos n\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ و $\sin n\theta = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$: $\forall n \in \mathbb{Z}$

• **تمرين14:**

بين أنه لكل θ من $\mathbb{R}$ لدينا : $1+e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $1-e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

ثم إستنتج الكتابة الأسية للأعداد العقدية التالية :

$z_0 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3}i)$ و $z_1 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$ و $z_2 = 2+\sqrt{2}(1+i)$.

• **إخطاط $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ حيث $n \ge 2$:**

يهدف الإخطاط إلى التعبير عن $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ بدلالة $\cos k\theta$ و $\sin k\theta$

(حيث $1 \le k \le n$) و ذلك باستعمال صيغتا أولير ثم صيغة حدانية نيوتن .

• **أمثلة:**

إخطاط : $\sin^4\theta$ و $\cos^5\theta$ و $\sin^5\theta$

لدينا : $\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

إذن : $\sin^4\theta = \frac{1}{16}(2\cos 4\theta - 8\cos 2\theta + 6) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta$.

و $\cos^5\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}\right)$

إذن : $\cos^5\theta = \frac{1}{16}\cos 5\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{5}{8}\cos\theta$.

و $\sin^5\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}\right)$

إذن : $\sin^5\theta = \frac{1}{16}\sin 5\theta - \frac{5}{16}\sin 3\theta + \frac{5}{8}\sin\theta$.

• **ملحوظة:**

العملية التي نحسب فيها $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ باستعمال صيغة موافر هي عملية عكسية للعملية التي يتم فيها إخطاط $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ باستعمال صيغتا أولير .

VI- **الجذور من الرتبة n لعدد عقدي غير منعدم:**

1)- **تعريف:**

ليكن a عددا عقديا غير منعدم و n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \ge 2$.

كل عدد عقدي z حل للمعادلة $z^n = a$ يسمى جذرا من الرتبة n (أو جذرا نونيا) للعدد العقدي a .

كل جذر من الرتبة 2 يسمى جذرا مربعا ، و كل جذر من الرتبة 3 يسمى جذرا مكعبا .

- **أمثلة:**

لإيجاد الجذور المكعبة للعدد $a=8i$ يجب حل المعادلة : $(E):z^3=8i$.

لدينا : $(E)\Leftrightarrow z^3-8i=0\Leftrightarrow z^3+(2i)^3=0$ لأن $i^3=-i$.

إذن : $(E)\Leftrightarrow(z+2i)(z^2-2iz-4)=0$.

نحل المعادلة : $(z^2-2iz-4)=0$ ، مميزها المختصر هو : $\Delta'=(-i)^2+4=3$

و جذريها هما : $z_1=-\sqrt{3}+i$ و $z_2=\sqrt{3}+i$.

إذن للعدد $a=8i$ ثلاثة جذور مكعبة هي : $z_0=-2i$ و $z_1=-\sqrt{3}+i$ و $z_2=\sqrt{3}+i$.

- **سؤال:**

نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط $A(z_0)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$.

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع رؤوسه تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O و شعاعها $R=2$.

- **مبرهنة:**

ليكن $a=[r,\alpha]$ عددا عقديا غير منعدم و n عدد صحيح طبيعي بحيث $n\geq 2$.

للعدد a ، n جذرا نونيا شكلها المثلثي هو: $z_k=\left[\sqrt[n]{r},\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right]$ حيث $0\leq k\leq n-1$

صورها في المستوى العقدي (P) رؤوس مضلع منتظم محاط بالدائرة التي مركزها O و شعاعها $R=\sqrt[n]{r}$.

- **مثال:**

لنحدد الجذور الرابعة للعدد $a=-64$.

نكتب العدد $a=-64$ على الشكل المثلثي ، لدينا $a=[64,\pi]$ و لنضع : $z=[r,\theta]$

إذن : $z^4=a\Leftrightarrow[r^4,4\theta]=[64,\pi]$

و هذا يعني أن : $r=\sqrt[4]{64}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{(2k+1)\pi}{4}$ حيث $0\leq k\leq 3$

إذن الجذور الرابعة للعدد $a=-64$ هي : $z_k=\left[2\sqrt{2},\frac{(2k+1)\pi}{4}\right]$ حيث $0\leq k\leq 3$.

أي أن : $z_0=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ و $z_2=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right]$

و $z_3=\left[2\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right]$.

- **تمرين15:**

أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $a=1-i$ ، ثم إستنتج جذوره من الرتبة 5 .

2)- الجذور النونية للوحدة:

- **تعريف:**

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n\geq 2$.

كل عدد عقدي z حل للمعادلة $z^n=1$ يسمى جذرا نونيا للوحدة .

- **مثال:**

أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ثم تحقق من أن j و $\overline{j}$

جذرين مكعبين للوحدة ، و أن $j^2=\overline{j}$.

- **خاصية14:**

الجذور النونية للوحدة هي الأعداد العقدية $z_k=\left[1,\frac{2k\pi}{n}\right]$ حيث $0\leq k\leq n-1$

و صورها في المستوى العقدي (P) رؤوس مضلع منتظم محاط بالدائرة المثلثية .

- **ملحوظة:**

إذا علمنا جذرا نونيا z لعدد عقدي غير منعدم a ، فإن جذور a من الرتبة n هي

الأعداد العقدية : $z_k=z.\left[1,\frac{2k\pi}{n}\right]$ ، حيث $0\leq k\leq n-1$.

- **تمرين16:**

أ- أحسب $(1-i)^3$ ، ثم إستنتج الجذور المكعبة للعدد العقدي $a=-2(1+i)$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+2(1+i)=0$.

abouzakariya@yahoo.fr