I – مجموعة تعريف دالة عددية : Domaine de Définition d'une Fonction Numérique :

لتكن f دالة عددية ولتكن P و Q حدوديتان .

مجموعة تعريف الدالة العددية f هي : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\mathbb{R}\}$ ؛ أي مجموعة الأعداد الحقيقية التي لها صورة بالدالة f .

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}/Q(x)\neq 0\}$$

$$f(x)=\sqrt{P(x)} \Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}/P(x)\geq 0\}$$

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} \Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}/Q(x)>0\}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} \Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}/P(x)\times Q(x)\geq 0 \text{ و } Q(x)\neq 0\}$$

($P(x)\times Q(x)\geq 0$ يعني أن $P(x)$ و $Q(x)$ لهما نفس الإشارة)

$$f(x)=\frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}} \Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}/P(x)\geq 0 \text{ و } Q(x)>0\}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}} \Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}/P(x)\geq 0 \text{ و } Q(x)\geq 0 \text{ و } P(x)\neq Q(x)\}$$

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & ; \quad x\in I \\ f_2(x) & ; \quad x\in J\end{cases} \Rightarrow D_f=\left(D_{f_1}\cap I\right)\cup\left(D_{f_2}\cap J\right)$$

II - النهايات : Limites :

1 – نتائج :

I : مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .

- ✓ نهاية دالة حدودية عند اللا نهاية $(\pm\infty)$ هي نهاية حدها الأعلى درجة .
- ✓ نهاية دالة جذرية عند اللا نهاية $(\pm\infty)$ هي نهاية خارج حديها الأعلى درجة .

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=|l|$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \\ \forall x\in I : f(x)\geq 0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

$n\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{n \text{ فردي} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} x^n=-\infty} \quad \boxed{n \text{ زوجي} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} x^n=+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} x^n=+\infty}$$

- ✓ الدوال $x\mapsto \sin(x)$ و $x\mapsto \cos(x)$ و $x\mapsto \tan(x)$ لا تقبل نهاية عند اللا نهاية $(\pm\infty)$.

2 - النهايات والترتيب :

I مجال مفتوح منقط مركزه x_0 ؛ $l \in \mathbb{R}$:

✓ f و u دالتان معرفتان على المجال I . لدينا :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} u(x)=0 \text{ و } \forall x\in I : |f(x)-l| \le u(x)$$.

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)-l|=0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=l$$.

✓ لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I . لدينا :

$$\begin{cases} \forall x\in I : f(x)\ge 0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x)=l \end{cases} \Rightarrow l\ge 0$$

و

$$\begin{cases} \forall x\in I : f(x)\le 0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x)=l \end{cases} \Rightarrow l\le 0$$

✓ لتكن f و g و h ثلاث دوال عددية معرفة على المجال I. لدينا :

$$\begin{cases} \forall x\in I : g(x)\le f(x)\le h(x) \\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

✓ لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على المجال I. لدينا :

$$\begin{cases} \forall x\in I : f(x)\le g(x) \\ \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$$

$$\begin{cases} \forall x\in I : f(x)\le g(x) \\ \lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

3 – العمليات على النهايات :

أ – نهاية مجموع دالتين عدديتين :

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R} \\ \lim_{x\to x_0} g(x)\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)\in\mathbb{R}$$

$l\in\mathbb{R}$ و $l'\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد $(F.I)$

ب – نهاية جداء دالتين عدديتين :

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R} \\ \lim_{x\to x_0} g(x)\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)\times g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\times\lim_{x\to x_0} g(x)\in\mathbb{R}$$

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0}[f(x)\times g(x)]$
l	l'	$l\times l'$
$l>0$	$+\infty$	$+\infty$
$l>0$	$-\infty$	$-\infty$
$l<0$	$+\infty$	$-\infty$
$l<0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	شكل غير محدد $(F.I.)$

0	$-\infty$	شكل غير محدد $(F.I.)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

جـ- نهاية مقلوب دالة عددية :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{\lim_{x\to x_0} f(x)}\in\mathbb{R}$$

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)}\right]$
$l\in\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{l}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

د – نهاية خارج دالتين عدديتين :

$$\begin{cases}\lim_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}\\ \lim_{x\to x_0} g(x)\in\mathbb{R}^*\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\in\mathbb{R}$$

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$
l	$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l>0$	0^+	$+\infty$
$l>0$	0^-	$-\infty$
$l<0$	0^+	$-\infty$
$l<0$	0^-	$+\infty$
$+\infty$	$l>0$	$+\infty$
$+\infty$	$l<0$	$-\infty$
$-\infty$	$l>0$	$-\infty$
$-\infty$	$l<0$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	شكل غير محدد $(F.I.)$
0	0	شكل غير محدد $(F.I.)$

III – الإتصال : Continuité :

1 – الإتصال في نقطة : Continuité en un point :

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 . نقول إن f **متصلة** في النقطة x_0 إذاكان :

$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$.

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال $[x_0,x_0+\alpha[$ حيث $\alpha>0$.

نقول إن f **متصلة على اليمين** في النقطة x_0 إذاكان : $\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)}$

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال $]x_0-\alpha,x_0]$ حيث $\alpha>0$.

نقول إن f **متصلة على اليسار** في النقطة x_0 إذاكان : $\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)}$

✓ f متصلة في النقطة x_0 $\Leftrightarrow$ f متصلة على اليمين وعلى اليسار في النقطة x_0

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)}$

2 – الإتصال على مجال : ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ حيث $(a<b)$ Continuité sur un intervalle :

✓ تكون دالة عددية f متصلة على مجال مفتوح $]a,b[$ ؛ إذا كانت متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$.

✓ تكون دالة عددية f متصلة على مجال $[a,b[$؛ إذا كانت متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$ وكانت متصلة على اليمين في النقطة a.

✓ تكون دالة عددية f متصلة على مجال $]a,b]$ ؛ إذا كانت متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$وكانت متصلة على اليسار في النقطة b.

✓ تكون دالة عددية f متصلة على مجال $[a,b]$ ؛ إذا كانت متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$وكانت متصلة على اليمين في النقطة a وكانت متصلة على اليسار في النقطة b.

✓ كل دالة حدودية تكون متصلة على $\mathbb{R}$.

✓ كل دالة جذرية تكون متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها .

✓ الدالتان $x\mapsto\cos(x)$ و $x\mapsto\sin(x)$ متصلتان على $\mathbb{R}$.

✓ الدالة $x\mapsto\tan(x)$ متصلة في كل نقطة من حيز تعرفها $D_{\tan}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

✓ الدالة $\sqrt{\ }: x\mapsto\sqrt{x}$ متصلة على المجال $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$.

✓ إذا كانت f دالة متصلة على مجال I وكان $\boxed{\forall x\in I, f(x)\geq 0}$ ؛ فإن الدالة $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ تكون متصلة على المجال I .

✓ إذا كانت f دالة متصلة على مجال I؛ فإن الدالة $x\mapsto|f(x)|$ تكون متصلة على المجال I.

3 – العمليات على الدوال المتصلة : Opérations sur les fonctions continues :

✓ إذا كانت f و g دالتين متصلتين في نقطة x_0 ؛ فإن :

- $f+g$ و $f\times g$ و $\lambda.f$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ تكون دوالا متصلة في النقطة x_0 .
- وإذا كان $g(x_0)\neq 0$ ؛ فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان في النقطة x_0 .

✓ إذا كانت f موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0 , وكانت متصلة في x_0 ؛ فإن $\sqrt{f}$ تكون متصلة في النقطة x_0 .

✓ إذا كانت f متصلة في نقطة x_0 ؛ فإن $|f|: x\mapsto|f(x)|$ تكون متصلة في النقطة x_0 .

4- اتصال مركب دالتين : Continuité de la composée de deux fonctions :

لتكن f دالة معرفة على مجال I ولتكن g دالة معرفة على مجال J بحيث : $\boxed{f(I)\subset J}$. $x_0\in I$.

✓ إذا كانت f متصلة في النقطة x_0 وكانت g متصلة في النقطة $f(x_0)$ ؛ فإن $g\circ f$ تكون متصلة في النقطة x_0 .

✓ إذا كانت f متصلة على المجال I و كانت g متصلة على المجال J (ومنه على $f(I)$) ؛ فإن $g\circ f$ تكون متصلة على المجال I.

5 – نهاية مركبة دالة متصلة ودالة تقبل نهاية :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0 ولتكن g دالة معرفة على مجال J بحيث : $\boxed{f(I)\subset J}$.

إذا كانت f تقبل النهاية l في x_0 وكانت g **متصلة في النقطة** l ؛ فإن الدالة $g\circ f$ النهاية $g(l)$ في النقطة x_0 :

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x)=g(l) \quad \text{حيث} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

6 – التمديد بالإتصال :

لتكن f دالة غير معرفة في نقطة x_0 ، وتقبل النهاية l في النقطة x_0 ؛ و D_f حيز تعريفها . الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $\begin{cases} g(x)=f(x) \quad ; \quad x\in D_f \\ f(x_0)=l \end{cases}$ هي دالة متصلة في النقطة x_0 ؛ وتسمى : **التمديد بالإتصال** للدالة f في النقطة x_0 .

IV- التماثلات : Les symétries :

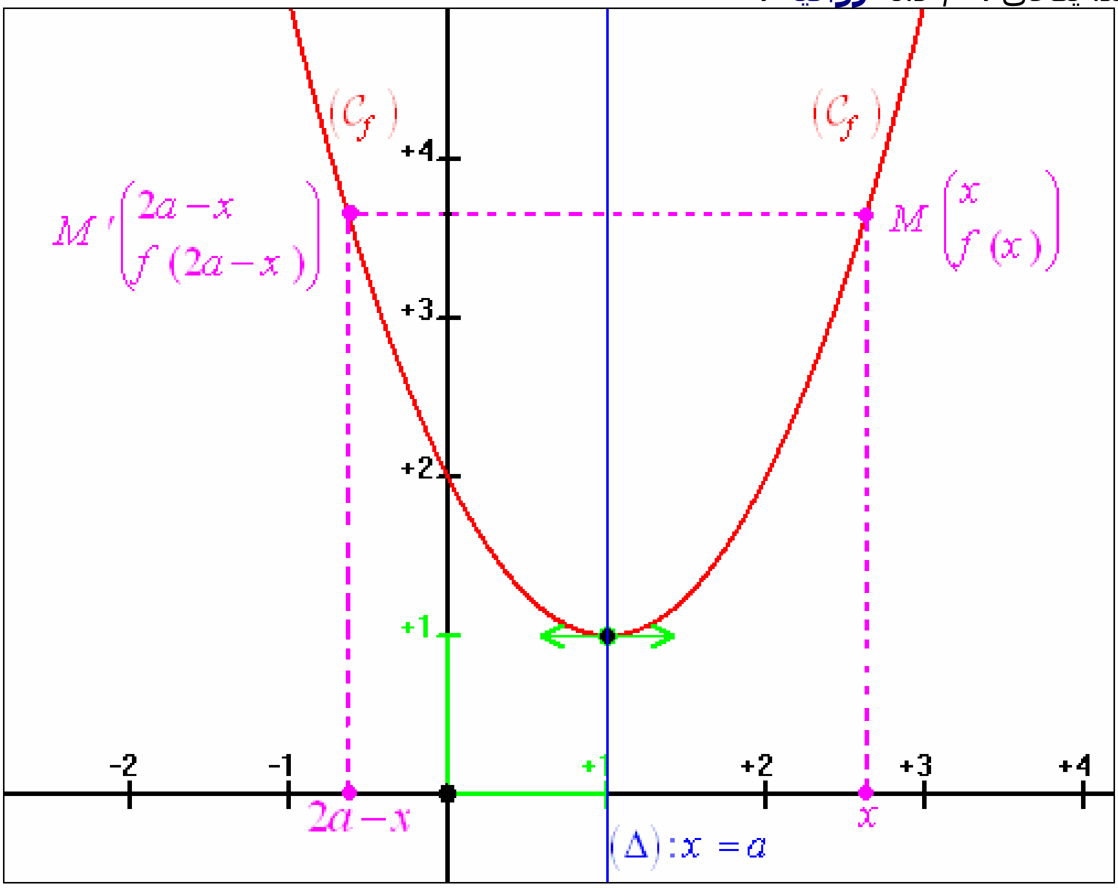
1- محور تماثل : Axes de symétries :

✓ يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ **محور تماثل** للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ إذا تحقق الشرطان التاليان :

$\boxed{\forall x\in D_f \quad : \quad 2a-x\in D_f}$ و $\boxed{\forall x\in D_f \quad : \quad f(2a-x)=f(x)}$

✓ يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=0$ (محور الأراتيب) محور تماثل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ إذا تحقق الشرطان التاليان : $\boxed{\forall x\in D_f \quad : \quad -x\in D_f}$ و $\boxed{\forall x\in D_f \quad : \quad f(-x)=f(x)}$

وهذا يكافئ : f دالة **زوجية** .



Centres de Symétries :
2- مركز تماثل :

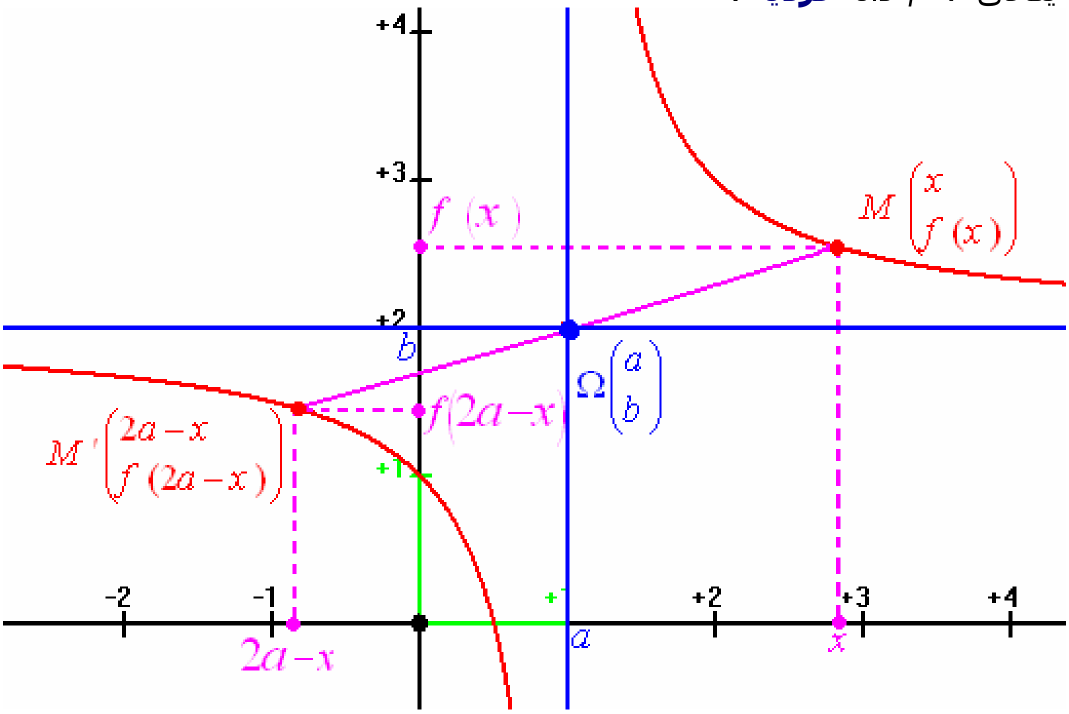
✓ تكون النقطة $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ **مركز تماثل** لمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ إذا تحقق الشرطان التاليان :

$\boxed{\forall x \in D_f \quad : \quad 2a - x \in D_f}$ و $\boxed{\forall x \in D_f \quad : \quad 2b - f(x) = f(2a - x)}$

✓ تكون النقطة $O\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ مركز تماثل لمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان :

$\boxed{\forall x \in D_f \quad : \quad -x \in D_f}$ و $\boxed{\forall x \in D_f \quad : \quad f(-x) = -f(x)}$

وهذا يكافئ : f دالة **فردية** .



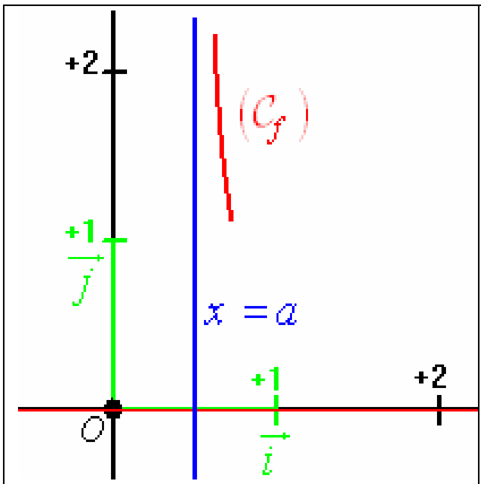
مثال : بين أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ مركز تماثل لمنحنى الدالة $x \mapsto \dfrac{1-2x}{x^2 - x - 2}$.

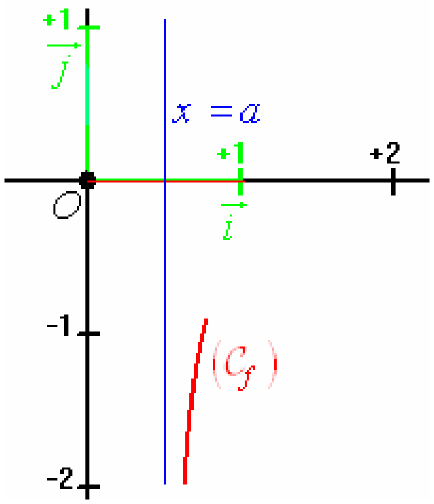
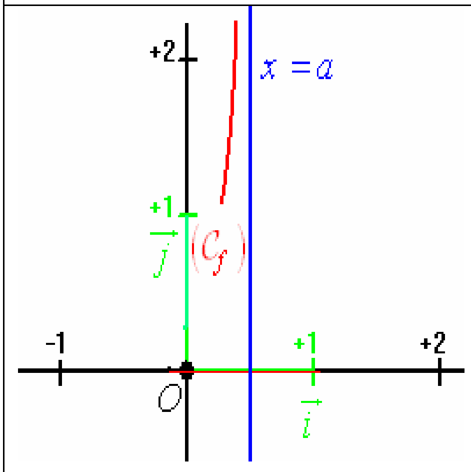
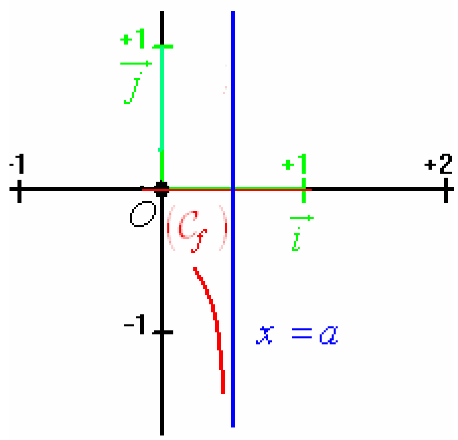
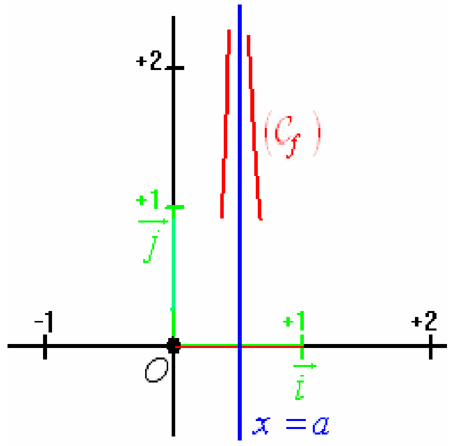
بين أن المستقيم $x = 3 \quad :(\Delta)$ محور تماثل لمنحنى الدالة $x \mapsto 2x^2 - 12x + 19$.

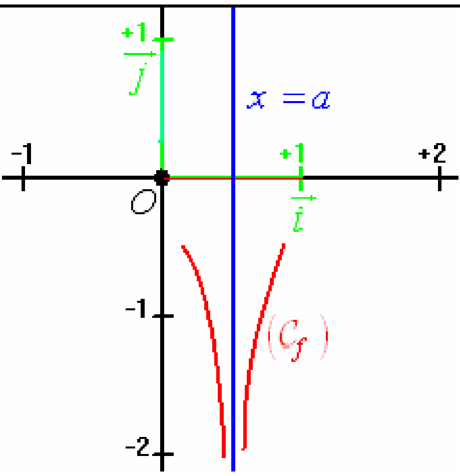
Les Branches Infinies :
V- الفروع اللانهائية :

Asymptotes Verticales :
1 – المقاربات العمودية :

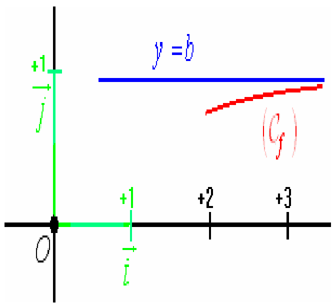
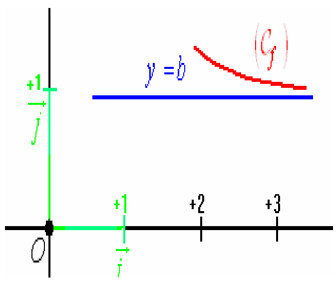
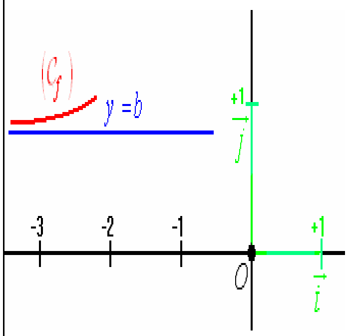
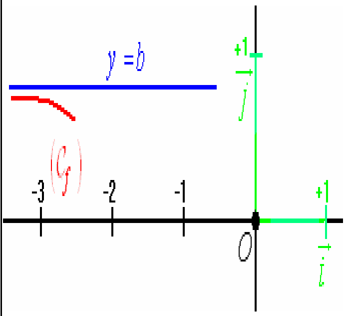
ليكن $a \in \mathbb{R}$

	$\boxed{x = a}$ مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار a على اليمين	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

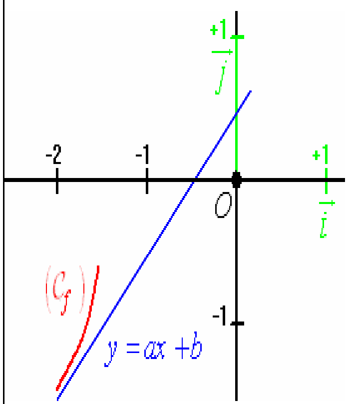
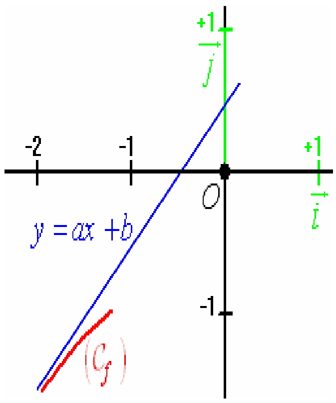
	$\boxed{x=a}$ مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار a على اليمين	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$
	$\boxed{x=a}$ مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار a على اليسار	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$
	$\boxed{x=a}$ مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار a على اليسار	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$
	$\boxed{x=a}$ مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار a	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

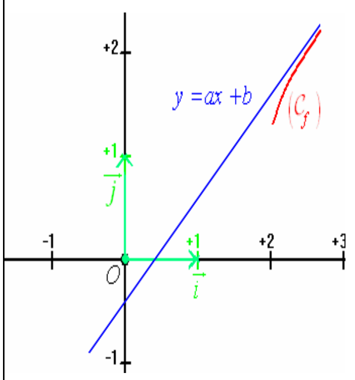
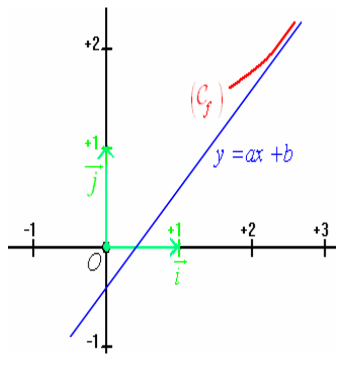
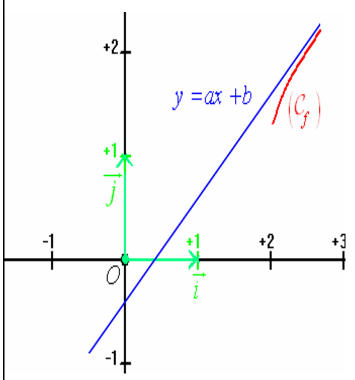
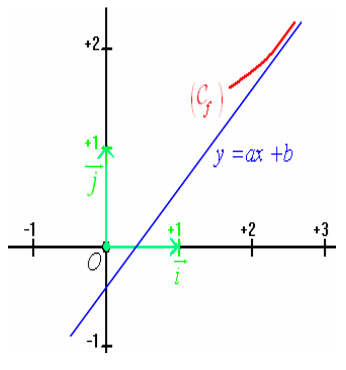
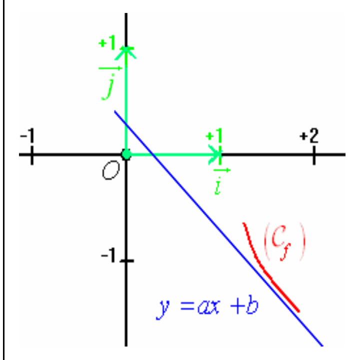
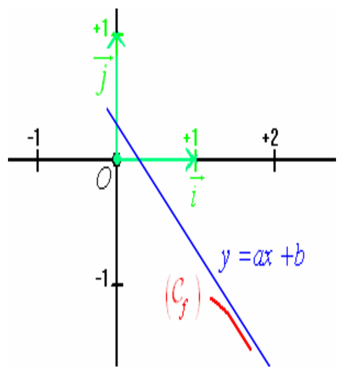
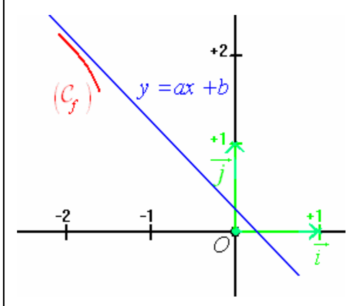
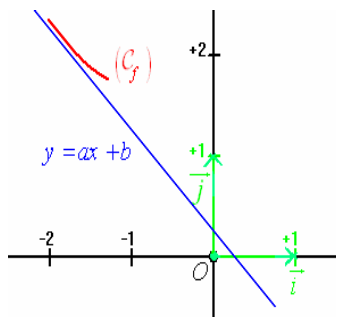
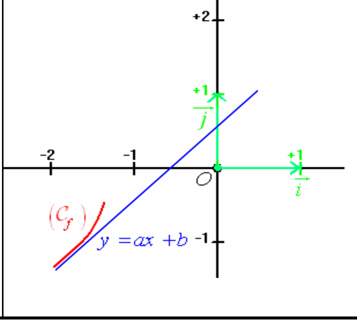
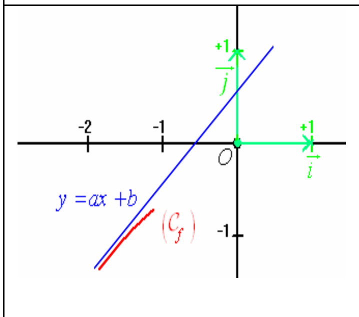
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\boxed{x = a}$ مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار a	

2 – المقاربات الأفقية : ليكن : $b \in \mathbb{R}$ Asymptotes Horizontales :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$	$\boxed{y = b}$ مقارب أفقي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$		
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$	$\boxed{y = b}$ مقارب أفقي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$		

3 – المقاربات المائلة : ليكن : $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$ Asymptotes Obliques :

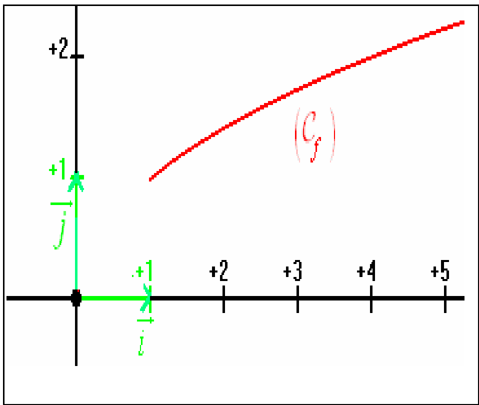
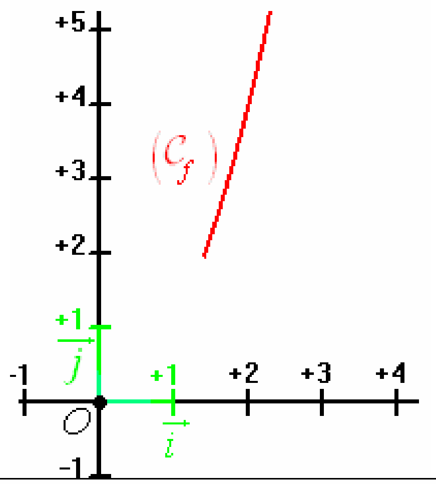
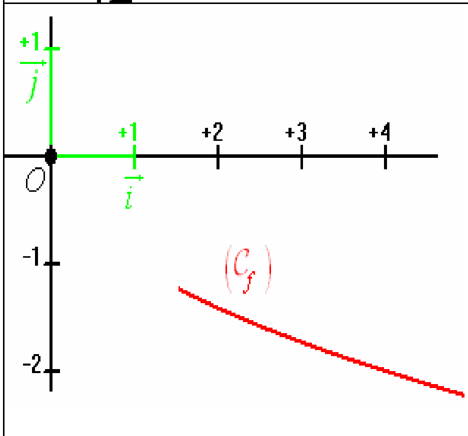
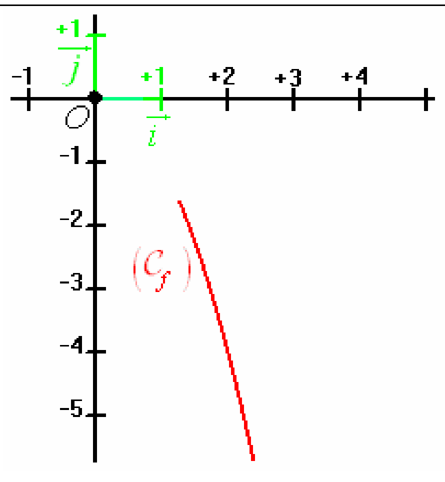
$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$	$\boxed{y = ax + b}$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$		

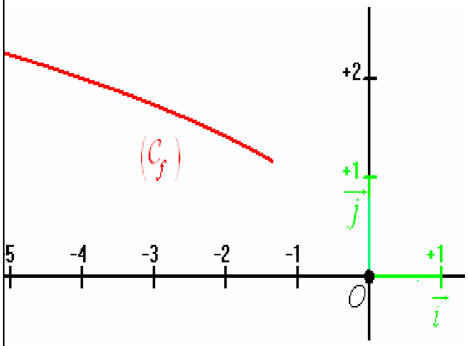
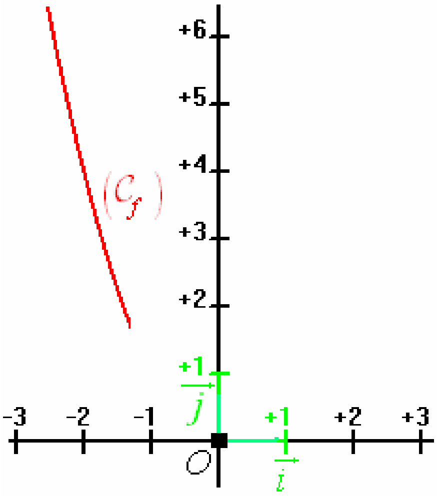
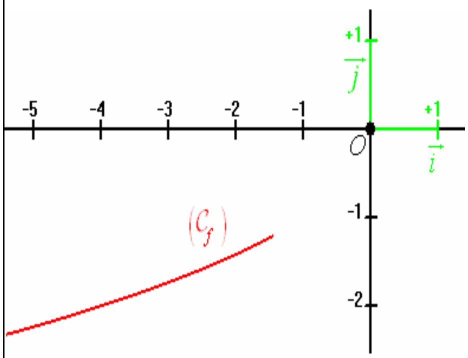
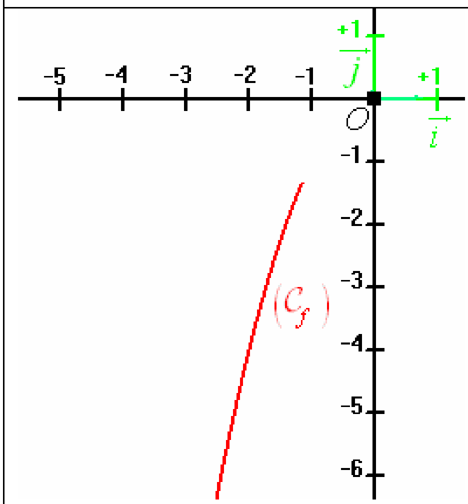
$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	$\boxed{y=ax+b}$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$		
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b\in\mathbb{R}$	$\boxed{y=ax+b}$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$		
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b\in\mathbb{R}$	$\boxed{y=ax+b}$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$		
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b\in\mathbb{R}$	$\boxed{y=ax+b}$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$		
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b\in\mathbb{R}$	$\boxed{y=ax+b}$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$		

لدراسة الوضع النسبي لمستقيم $(\Delta): y = ax + b$ و منحنى $(\mathcal{C}_f)$ ؛ ندرس إشارة الفرق : $f(x)-(ax+b)$.

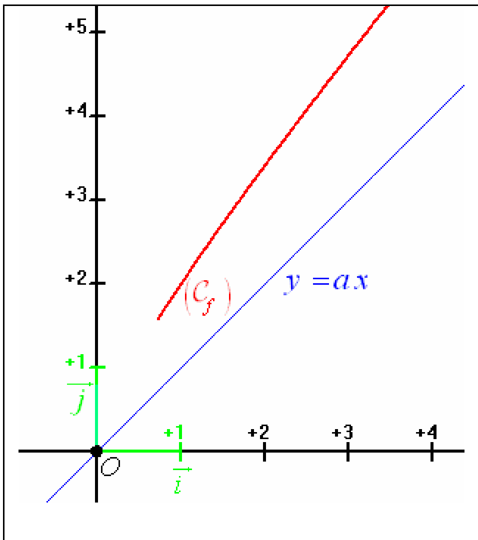
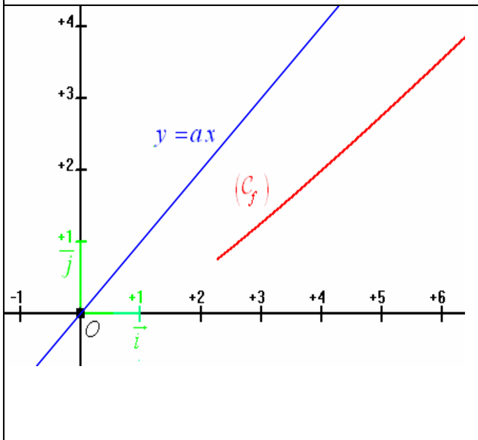
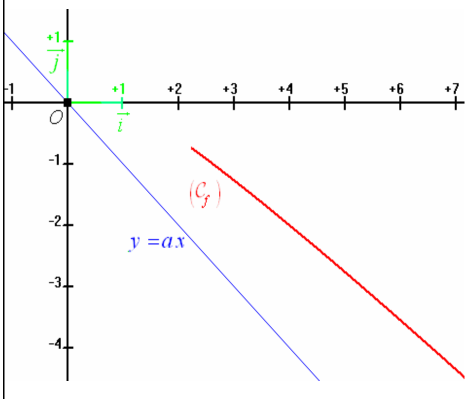
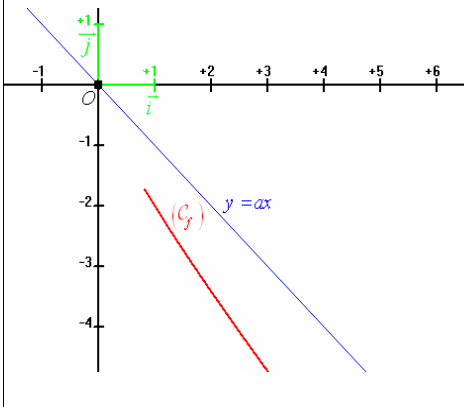
4 – الإتجاهات المقاربة : Directions asymptotiques :

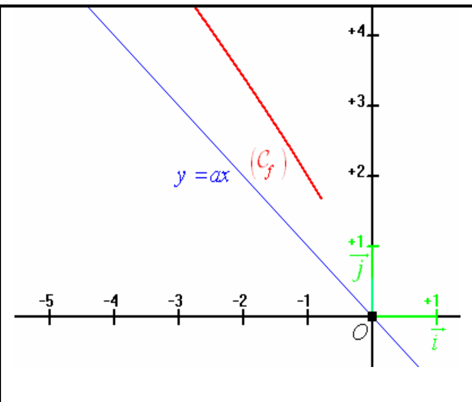
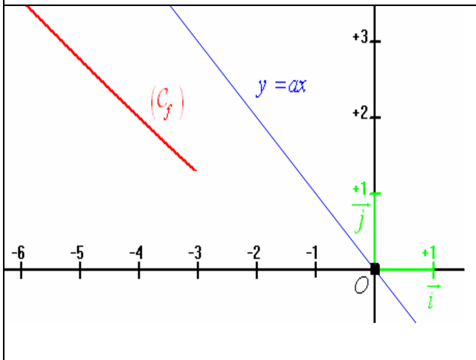
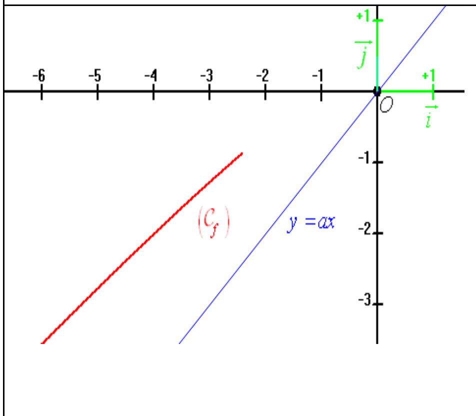
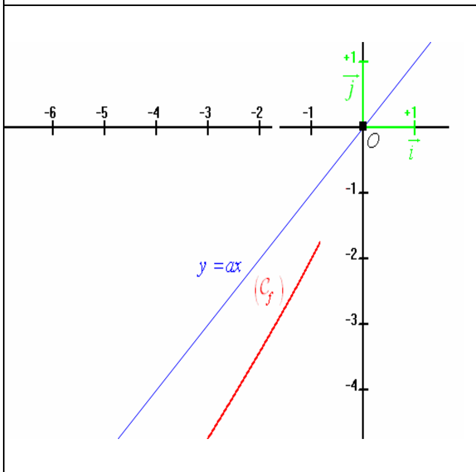
أ -

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$	$(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$	$(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$	$(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاهمحور الأفاصيل بجوار $+\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$	$(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=0$	(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$	(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=0$	(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$	(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$	

ب –

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-ax\right]=+\infty$	يقبل $(\mathcal{C}_f)$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=ax}$ بجوار $+\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-ax\right]=-\infty$	يقبل $(\mathcal{C}_f)$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=ax}$ بجوار $+\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-ax\right]=+\infty$	يقبل $(\mathcal{C}_f)$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=ax}$ بجوار $+\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-ax\right]=-\infty$	يقبل $(\mathcal{C}_f)$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=ax}$ بجوار $+\infty$	

	يقبل (C_f) فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=ax}$ بجوار $-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-ax]=+\infty$
	يقبل (C_f) فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=ax}$ بجوار $-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-ax]=-\infty$
	يقبل (C_f) فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=ax}$ بجوار $-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-ax]=+\infty$
	يقبل (C_f) فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=ax}$ بجوار $-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-ax]=-\infty$

VI- الدوال الدورية : Les Fonctions Périodiques :

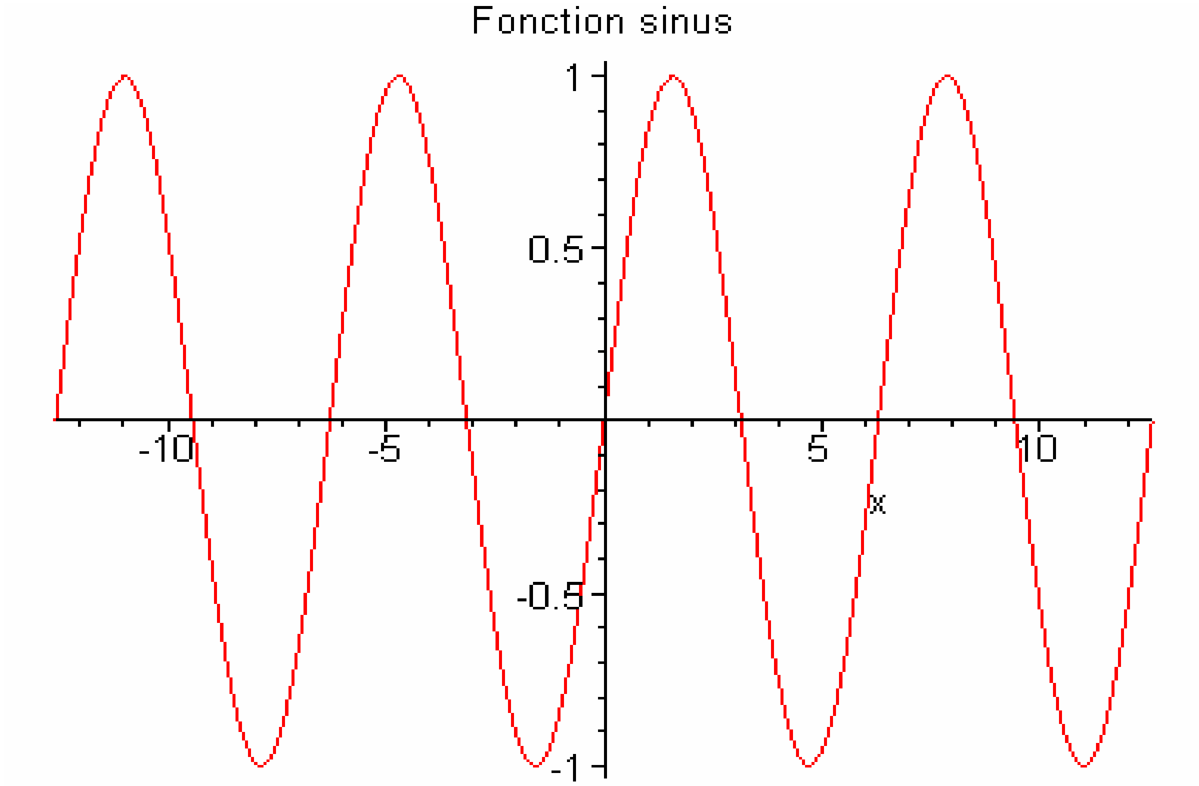
✓ لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها . تكون f دالة **دورية** دورها $T>0$ ؛ إذا تحقق ما يلي :

- $\forall x\in D_f \quad : \quad x+T\in D_f$ و $x-T\in D_f$
- $\forall x\in D_f \quad : \quad f(x+T)=f(x)$ و $f(x-T)=f(x)$

✓ منحنى الدالة $\sin : x \mapsto \sin(x)$ على المجال $\left[-4\pi, 4\pi\right]$. $\sin$ دالة دورية دورها 2π .

باستعمال البرنامج $Maple10$ ، نحصل على ما يلي :

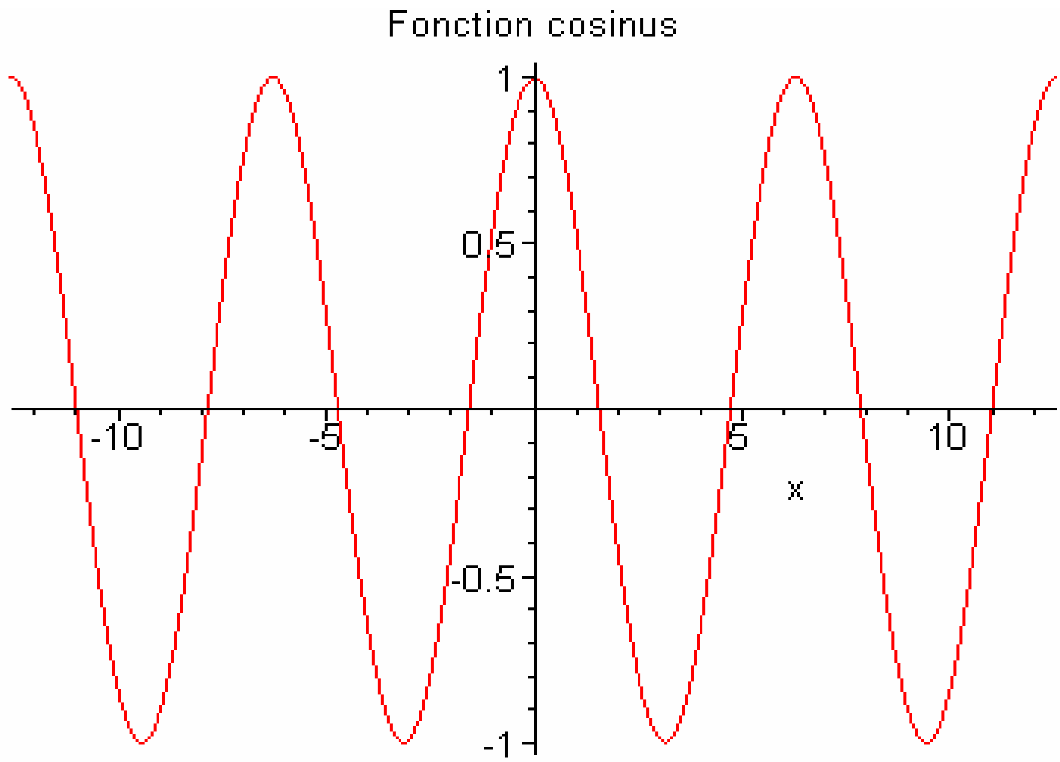
```
plot(sin(x),x=-4*Pi..4*Pi,title=`Fonction sinus`);
```



✓ منحنى الدالة $\cos : x \mapsto \cos(x)$ على المجال $[-4\pi, 4\pi]$. $\cos$ دالة دورية دورها 2π .

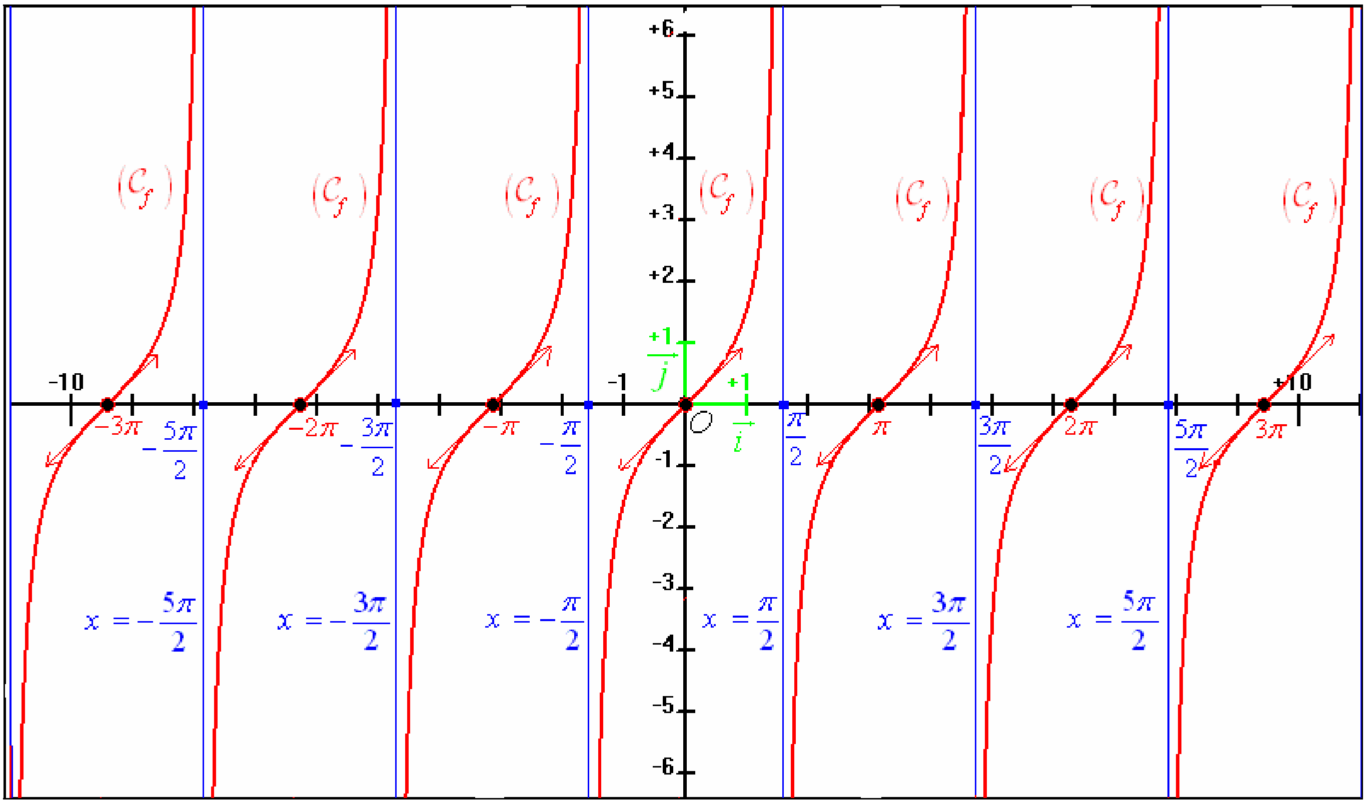
باستعمال البرنامج $Maple10$ ، نحصل على ما يلي :

```
plot(cos(x),x=-4*Pi..4*Pi,title=`Fonction cosinus`);
```

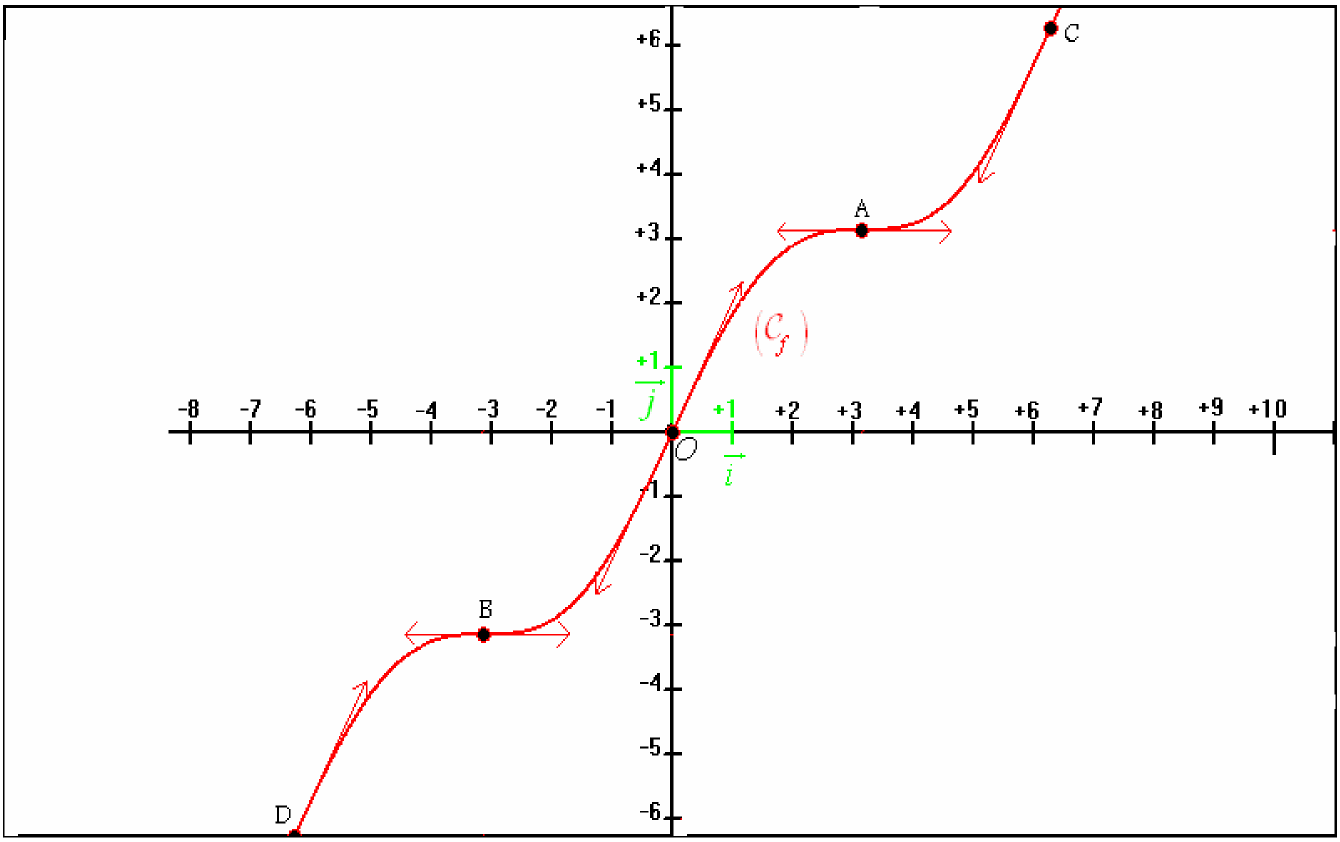


✓ منحنى الدالة $\tan : x \mapsto \tan(x)$ على المجال $\left]-\frac{7\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$. tan دالة دورية دورها π .

باستعمال البرنام **Archimède 2** ، نحصل على ما يلي :



✓ منحنى الدالة $x \mapsto x + \sin(x)$ باستعمال البرنام **Archimède 2 :**



النقط $M_k(k\pi, k\pi)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ هي نقط انعطاف لمنحنى الدالة $x \mapsto x + \sin(x)$.