دراسة الدوال

الجحرة محمد ثانوية علال
بن عبد الله نيابة بنـي ملال

EL JOHRA MOHAMED

http://www.meljohra.ift.cx | meljohra@gmail.com http://www.meljohra.ift.cx | meljohra@gmail.com

دراسة الدوال

الحصة رقم 1

I. قابلية الاشتقاق و رتابة دالة

1. خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

تكون f ثابتة على I إذا و فقط إذا كانت f ' منعدمة على I

تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كانت f ' موجبة على I

تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كانت f ' سالبة على I

2. خاصية 2

إذا كانت f ' موجبة قطعا على I (يمكن أن تنعدم في عدد منته من النقط) فإن f تزايدية قطعا على I

إذا كانت f ' سالبة قطعا على I (يمكن أن تنعدم في عدد منته من النقط) فإن f تناقصية قطعا على I

3. مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

f دالة حدودية قابلة للاشتقاق على IR و لدينا : $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$

لدينا لكل x من $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$: f'(x) > 0 و $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ إذن f تزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

و لدينا لكل x من $]-\infty,0[\sqcup \left]0;\frac{3}{2}\right[$: f'(x)<0 و $f'\left(\frac{3}{2}\right) = f'(0) = 0$

إذن f تناقصية قطعا على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$

II. مطارف دالة

1. تعريف

لتكن f دالة عددية و Df حيز تعريفها و a عنصرا من Df

نقول إن f(a) قيمة دنيا للدالة f عند a إذا وجد مجال مفتوح I مركزه a بحيث $(\forall x \in I): \mathrm{f(x)} \geq \mathrm{f(a)}$

إذا كان $(\forall x \in): \mathrm{f(x)} \geq \mathrm{f(a)}$ فإننا نقول إن f(a) قيمة دنيا مطلقة ل f عند a

نقول إن f(a) قيمة قصوى للدالة f عند a إذا وجد مجال مفتوح I مركزه a بحيث $(\forall x \in I): \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{f(a)}$

إذا كان $(\forall x \in Df): \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{f(a)}$ فإننا نقول إن f(a) قيمة قصوى مطلقة ل f عند a

الدالة f تقبل مطرافا على مجال I يعني أن f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى على I

2. الخاصيات

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f تقبل مطرافا في a فإن f'(a) = 0

إذا كانت f' تنعدم في a و تغير إشارتها فإن f تقبل مطرافا في a

3. مثال 1:

x		a	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

f(a) قيمة قصوى

4. مثال 2

x		a	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

f(a) قيمة دنيا

5. ملاحظة

$f'(a)=0$ لا يعني أن f تقبل مطرافا عند a أنظر المثال الشابق

أو أنظر الدالة $x \to x^3$

6. تمرين

لتكن (C) دائرة شعاعها 4 cm

ما هي المساحة القصوية لمستطيل محاط بالدائرة (C) ؟

7. الحل

ليكن x و y بعدي مستطيل محاط بالدائرة (C) إذن $x^2+y^2 = 8^2$ أي $y^2 = 64 - x^2$

و منه $y = \sqrt{64 - x^2}$ حيث $x \in]0, 8[$

و منه مساحة المستطيل هي : $S(x) = x\sqrt{64 - x^2}$

الدالة S متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0; 8[$

و لدينا $S'(x) = \sqrt{64 - x^2} + \frac{-x}{\sqrt{64-x^2}} = \frac{64-2x^2}{\sqrt{64-x^2}}$

ومنه $S'(x) = \frac{2(4\sqrt{2}- x)(4\sqrt{2}+x)}{\sqrt{64-x^2}}$

و بالتالي فإن جدول تغيرات الدالة S هو كالتالي :

x	0		$4\sqrt{2}$		8
S'(x)		+	0	-	
S(x)		↗	32	↘	

و بالتالي فإن المساحة القصوية هي $S(4\sqrt{2}) = 32$

8. تمرين geogebra

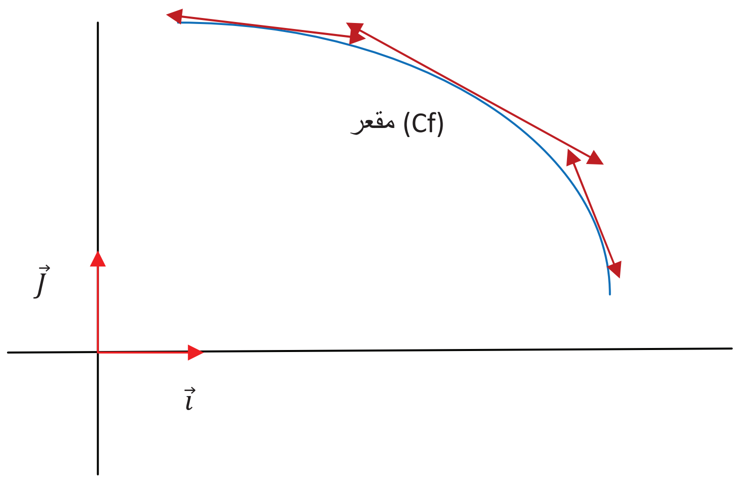
حل التمرين بواسطة geogebra

III. تقعر منحنى

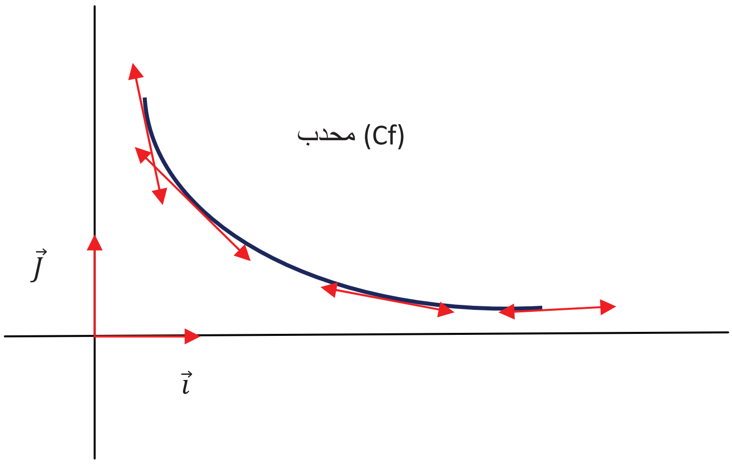
1. تعريف1:

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I و (Cf) منحناها في معلم $(0\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

نقول إن المنحنى (Cf) محدب (له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة) إذا كان المنحنى (Cf) يوجد فوق جميع مماساته

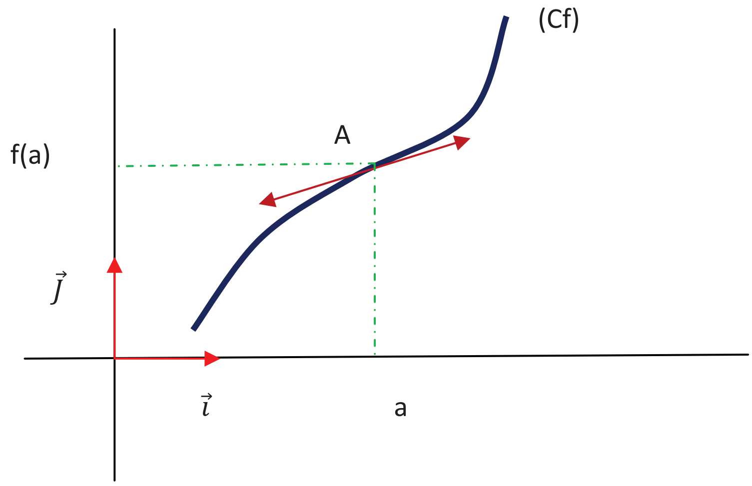


نقول إن المنحنى (Cf) مقعر (له تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة) إذا كان المنحنى (Cf) يوجد تحت جميع مماساته



2. تعريف 2: نقط الانعطاف

نقول إن النقطة (A (a ; f(a) نقطة انعطاف للمنحنى (Cf) إذا تغير تقعر (Cf) عند النقطة A



3. مثال

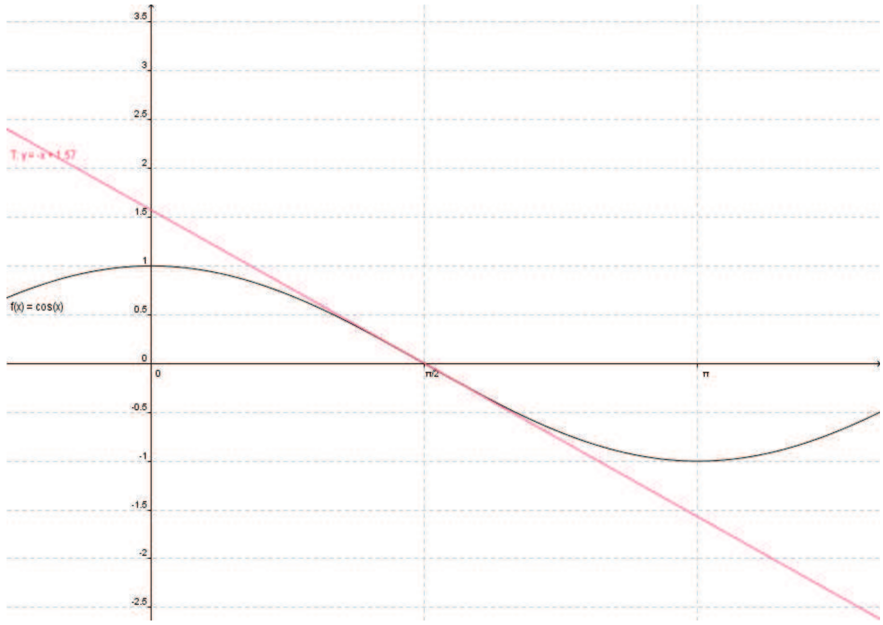
نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;\ \pi[$ بما يلي f(x) = cos x

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $]0;\ \pi[$ و f''(x) = - cosx

و منه فإن :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f''(x)	–	0	+
تقعر (Cf)	مقعر (Cf)		محدب (Cf)

الشكل:



IV. مركز تماثل – محور تماثل

1. تعريف

لتكن f دالة معرفة على حيز تعريفها (Df) و (Cf) منحناها في معلم $(0\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

يكون المستقيم ذو المعادلة x=a محور تماثل للمنحنى (Cf) إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} (\forall x \in Df)\ ;\ (2a-x) \in Df \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

تكون النقطة Ω(a,b) مركز تماثل المنحنى (Cf) إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} (\forall x \in Df)\ ;\ (2a-x) \in Df \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

2. حالة خاصة

إذا كانت f دالة زوجية أي : $\begin{cases} (\forall x \in Df)\ ;\ (-x) \in Df \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ فإن محور الأراتيب : x=0 محور تماثل للمنحنى (Cf)

إذا كانت f دالة فردية أي : $\begin{cases} (\forall x \in Df)\ ;\ (-x) \in Df \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ فإن النقطة O(0 ;0) مركز تماثل للمنحنى (Cf)

3. تمرين : تقعر و مركز تماثل منحنى

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $Df = IR - \{-1; 2\}$ ب : $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-2}$ و (Cf) منحناها في معلم $(0\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

1. أحسب f'(x) لكل x من Df
2. بين أن لكل x من Df لدينا : $f"(x) = \frac{2(1-2x)(x^2-x+7)}{(x^2-x-2)^3}$
3. أدرس تقعر المنحنى (Cf) و تحقق أن (Cf) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديد إحداثيتيها
4. بين أن النقطة I مركز تماثل للمنحنى (Cf)

4. الحل

1. تحديد الدالة المشتقة :

f دالة جذرية قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها Df و لدينا :

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-x-2)-(1-2x)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}$$

2. حساب f''(x)

f' دالة جذرية قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها D = Df و لدينا :

$$f''(x) = \frac{(4x-2)(x^2-x-2)^2-2(x^2-x-2)(2x-1)(2x^2-2x+5)}{(x^2-x-2)^4} = \frac{2(1-2x)(x^2-x+7)}{(x^2-x-2)^3}$$

3. دراسة التقعر

لدينا لكل x من Df : $x^2-x+7 > 0$ لأن المميز سالب

إذن إشارة f''(x) هي إشارة : $\frac{1-2x}{x^2-x-2}$ و منه الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		2		$+\infty$
$1-2x$		+		+	0	−		−	
x^2-x-2		+	0	−		−	0	+	
$f''(x)$		+	‖	−	0	+	‖	−	
تقعر (Cf)		محدب		مقعر		محدب		مقعر	

النقطة $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ نقطة انعطاف المنحنى (Cf)

4. مركز التماثل

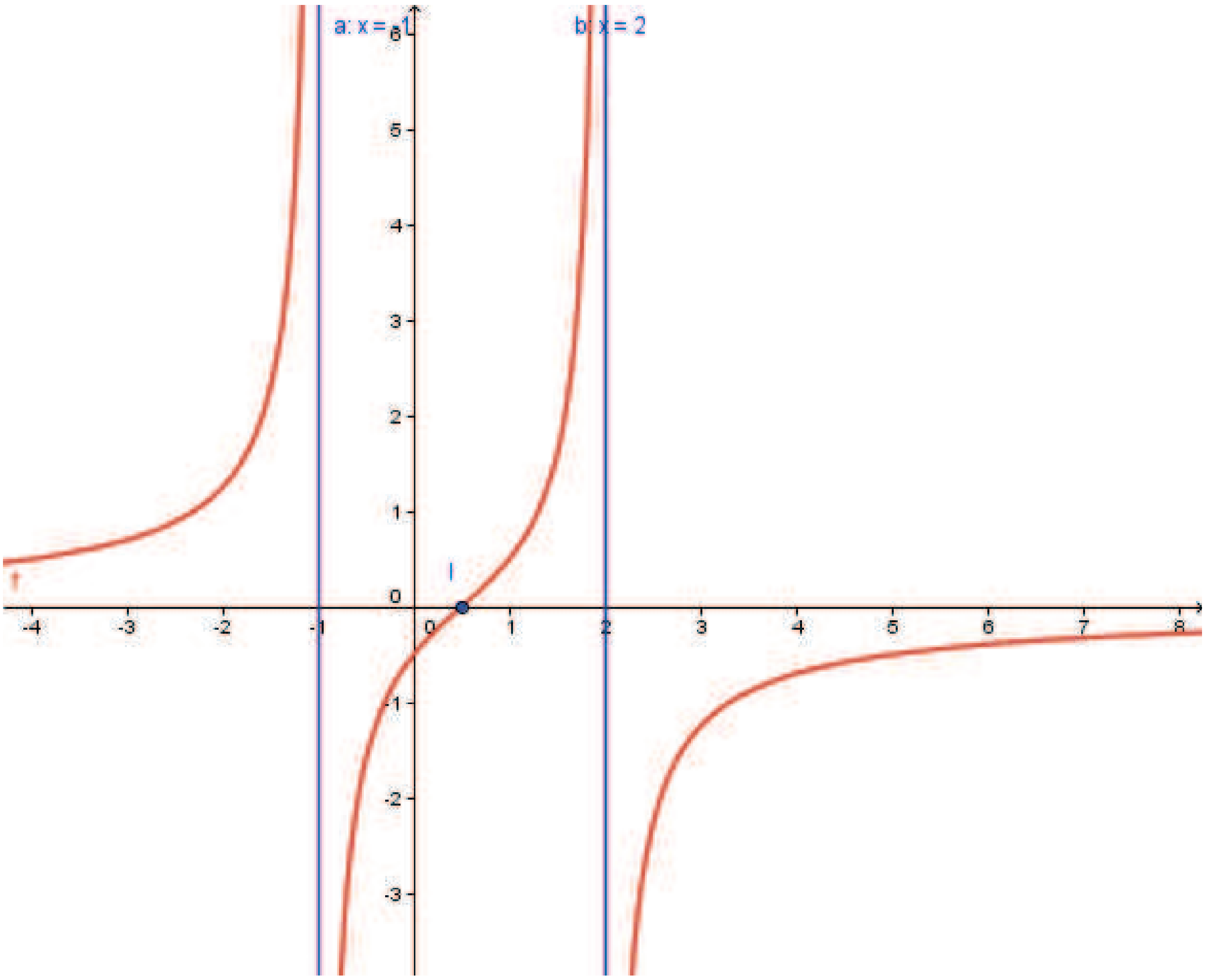
ليكن x من Df إذن $1-x \neq -1$ و $1-x \neq 2 \Longrightarrow x \neq -1$ و $x \neq 2$

ومنه $2 \times \frac{1}{2} - x = 1 - x \in Df$

و $f\left(2 \times \frac{1}{2} - x\right) = f(1-x) = \frac{-1+2x}{x^2-x-2} = 2 \times 0 - f(x)$

و بالتالي فإن النقطة $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ مركز تماثل المنحنى (Cf)

التمثيل المبياني بواسطة برنامج geogebra



الحصة رقم 5

V. الفروع اللانهائية

1. تذكير: منحنى دالة

$$(Cf) = \left\{M\binom{x}{y} \in (P)\,;\, y = f(x)\right\}$$

2. تعريف

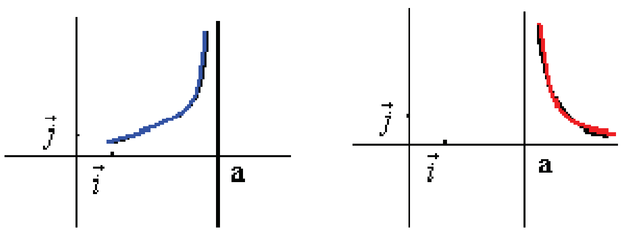
ليكن (Cf) منحنى دالة في معلم

نقول إن (Cf) يقبل فرعا لانهائيا إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة من (Cf) إلى $\pm\infty$

3. المستقيمات المقاربة

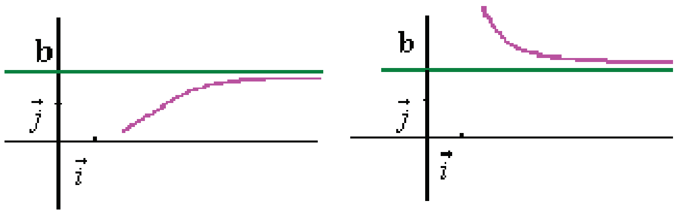
a. مقارب رأسي

إذا كان $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة x=a مقارب رأسي للمنحنى (Cf)



b. مقارب أفقي

إذا كان : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ فإن المستقيم ذا المعادلة y = b مقارب أفقي للمنحنى (Cf)



c. أمثلة

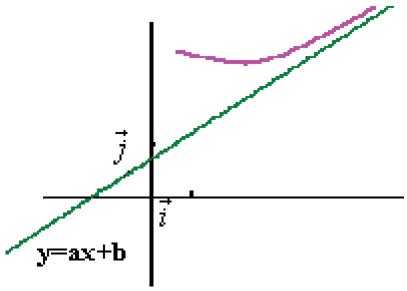
أنظر التمرين السابق

4. مقارب مائل

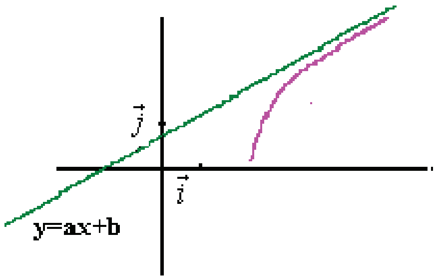
a. تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث a ≠ 0

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ فإن المستقيم ذا المعادلة y=ax+b مقارب مائل للمنحنى (Cf) بجوار $\pm\infty$



أو



b. خاصية

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث a ≠ 0

يكون المستقيم ذو المعادلة y = a x + b مقارب مائل للمنحنى (Cf) بجوار $\pm\infty$ إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$$

5. الفروع الشلجمية

نفترض هنا أن $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

a. تعريف 1

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ فإن المنحنى (Cf) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $\pm\infty$

b. تعريف 2

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ فإن (Cf) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

c. تعريف 3

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in IR^*$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=\pm\infty$ فإن (Cf) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المحور ذي المعادلة y= a x بجوار $\pm\infty$

6. تمرين تطبيقي

نضع f الدالة المعرفة ب: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار +∞

7. الحل

1. لدينا

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{-1}{-\infty}=0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة y = 0 (محور الأفاصيل) مقارب أفقي ل (Cf) بجوار ∞-

الفرع اللانهائي بجوار ∞+

2. لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

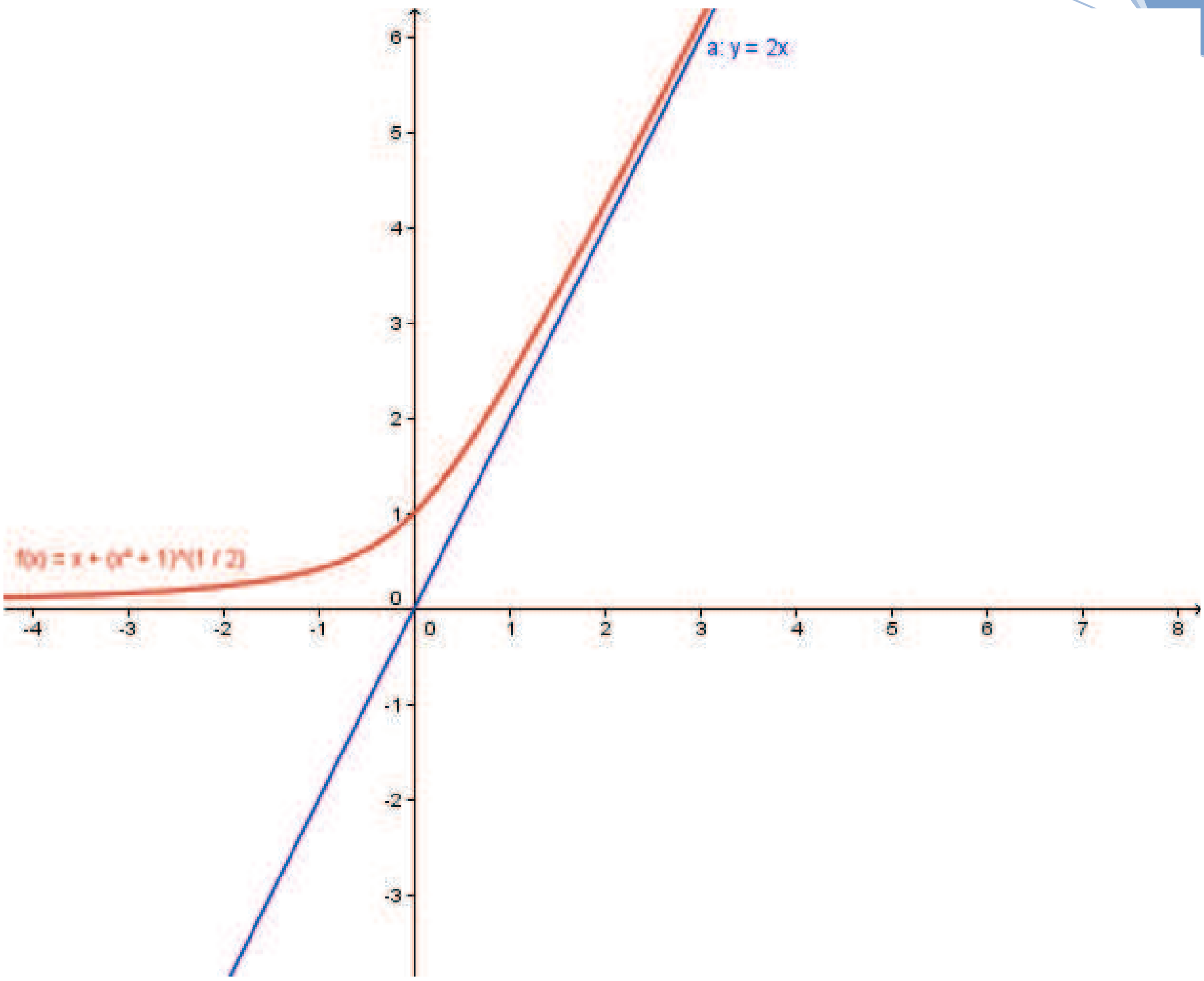
لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=2$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

و منه المنحنى (f) يقبل مقاربا مائلا معادلته y=2x بجوار ∞ +

3. ملاحظات

يمكن ملاحظة النتيجتين على الشكل التالي المحصل عليه باستعمال برنام geogebra


a: y = 2x