# دراسة الدوال العددية

## أهداف الدرس

- التمكن من دراسة دوال حدودية.
- التمكن من دراسة الدوال الجذرية و لا جذرية
- التمكن من دراسة دوال مثلثية.

## القدرات المنتظرة

- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراته أو انطلاقا من تمثيلها المبياني.
- حل مبيانيا معادلات من الشكل $f(x)=g(x)$ و متراجحات من الشكل $f(x)\leq g(x)$
- تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة دالتها المشتقة
- تحديد رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال و تمثيلها مبيانيا
- دراسة و تمثيل دوال جذرية و لا جذرية و مثلثية.

## الامتدادات

- المتتاليات العددية.
- الدوال اللوغارتمية و الدوال الأسية.
- العلوم الاقتصادية.
- الحساب التكاملي
- الإحصاء و الاحتمالات
- العلوم الفيزيائية و علوم الحياة و الأرض
- الجغرافيا

## فقرات الدرس

- الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية ( تذكير )
  - المقاربات
  - الفروع الشلجمية
- تقعر منحنى – نقط انعطاف
- محور تماثل – مركز تماثل منحنى دالة عددية.
- أمثلة من دراسة دالة عددية.

## I)-الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية ( تذكير )

نفترض في هذا الدرس أن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$ ، و أن $(C_f)$ منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

### 1)-المقارب العمودي أو الموازي لمحور الأراتيب

L'asymptote verticale ou parallèle à l'axe des ordonnées

**تعريف**

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب عمودي( أو يوازي محور الأراتيب) للمنحنى $(C_f)$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ .

**مثال**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

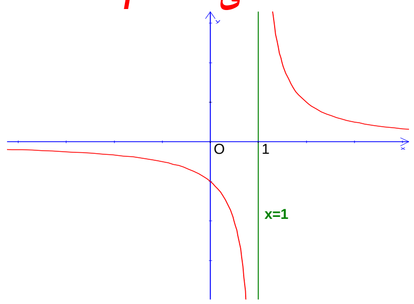
لدينا $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=+\infty$ ( لأن $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0^+$ ).

و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=-\infty$ ( لأن $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0^-$ ).

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$.

منحنى الدالة $f$




### 2)- المقارب الأفقي أو الموازي لمحور الأفاصيل

L'asymptote horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses

**تعريف**

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ يوازي محور الأفاصيل ( أو أفقي) إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ .

**مثال**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

لدينا : $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=+\infty$ ( لأن $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0^+$ و $\lim\limits_{x\to1} x=1$ ).

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty$ ( لأن $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0^-$ و $\lim\limits_{x\to1} x=1$ ).

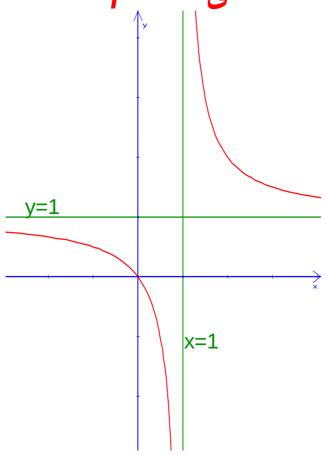
إذن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب أفقي لمنحنى $f$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

منحنى الدالة $f$



## 3)- المقارب المائل l’ asymptote oblique

### تعريف

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ على التوالي ( بجوار $-\infty$)، إذا كانت $(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0)$

على التوالي $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0)$.

### مثال

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$.

لدينا : $D_f=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ ( لأن $\lim\limits_{x\to-1^-}(x^2+x)=0^+$ ).

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$.

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ ( لأن $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+x)=0^+$ ).

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$.

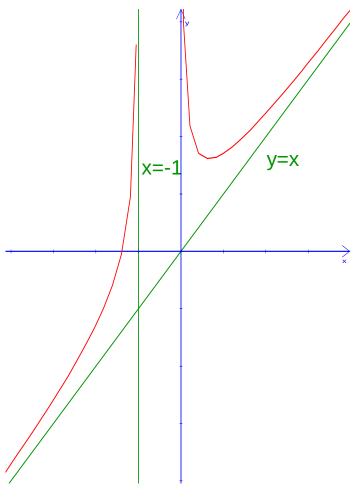
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ( $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}=0$ ) و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ( $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}=0$ ) و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $-\infty$.

منحنى الدالة $f$




### خاصية

يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ ، $(a\neq0)$ مقاربا مائلا للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$

إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ .

### ملاحظة

- ❖ نحصل على نفس الخاصية إذا عوضنا $(x\to+\infty)$ ب $(x\to-\infty)$.
- ❖ إذا كانت $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ يكون مقاربا مائلا للمنحنى $(C_f)$ بجوار $\infty$.

## 4)- الفروع الشلجمية Les branches paraboliques

### تعريف1

- ❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ نقول إن المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$ .
- ❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ نقول إن المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$ .

## مثال

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$.

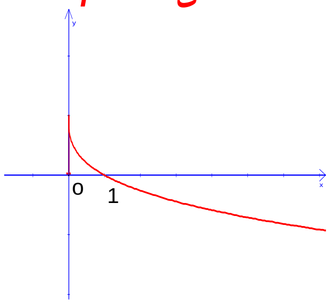
➢ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

إذن $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

منحنى الدالة $f$




## تعريف2

❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ .

❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$ .

## مثال

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^3+x-1$.

➢ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

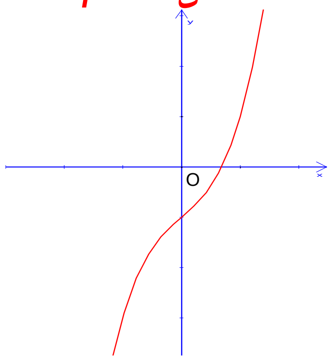
و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=+\infty$

إذن $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

➢ بنفس الطريقة نبين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

و منه $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

منحنى الدالة $f$




## تعريف3

❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a,(a\neq 0)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=\pm\infty$

نقول إن المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$ .

## مثال

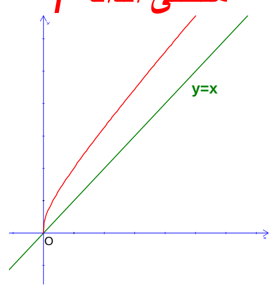
لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\sqrt[3]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3}}\right)+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3}}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$

إذن $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$

منحنى الدالة $f$



## تمرين

حدد $D_f$ ثم أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة $f$ في الحالات التالية:

$f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ ; $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$

$f(x)=\sqrt[3]{2x+1}-x$ ; $f(x)=\dfrac{1}{3}x-\sqrt[3]{x}$

## ملخص الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$ | المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$. | | |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ | المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ | | |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ | المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$ | | |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ مع $(a\neq 0)$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ | المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ |
| | | $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$ | $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$ |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ | المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ | |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ | المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$ | |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ مع $(a\neq 0)$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$ | المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل ل $(C_f)$ بجوار $-\infty$ |
| | | $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$ | $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $-\infty$ |
| | $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ | المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$ | |
| | $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ | المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$ | |

## II)- تقعر منحنى – نقط انعطاف

### 1)- تقعر منحنى concavité d'une courbe

**تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال $I$.

- نقول إن للمنحنى $(C_f)$ تقعرا موجها نحو الأراتيب الموجبة إذا كان يوجد فوق جميع مماساته.
- نقول إن للمنحنى $(C_f)$ تقعرا موجها نحو الأراتيب السالبة إذا كان يوجد تحت جميع مماساته.

### 2)- نقطة انعطاف Point d'inflexion

**تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح $I$، و $x_0 \in I$.

نقول إن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$ إذا تغير تقعره عند النقطة $A$.

**خاصية1**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $I$، و $x_0 \in I$.

- إذا كانت $f''$ موجبة على المجال $I$ فإن للمنحنى $(C_f)$ تقعرا موجها نحو الأراتيب الموجبة.
- إذا كانت $f''$ سالبة على المجال $I$ فإن للمنحنى $(C_f)$ تقعرا موجها نحو الأراتيب السالبة.
- إذا انعدمت $f''$ في $x_0$ و تغيرت إشارتها بجوار $x_0$ فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف $(C_f)$.

**خاصية2**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح $I$، و $x_0 \in I$.

إذا انعدمت $f'$ في $x_0$ و لا تغير إشارتها بجوار $x_0$ فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف $(C_f)$.

**تمرين**

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

- حدد $D_f$ ، حيز تعريف الدالة $f$، ثم أدرس تقعر منحنى الدالة $f$ و حدد نقط انعطافه.

## III)- محور تماثل – مركز تماثل Axe de symétrie – centre de symétrie

**خاصيات**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $D_f$ و $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم و $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل المنحنى $(C_f)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(2a - x) = f(x) \end{cases}$.
- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى $(C_f)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$.

**ملاحظة**

- إذا كانت $f$ دالة زوجية فإن محور الأراتيب ، محور تماثل منحناها $(C_f)$ في معلم متعامد ممنظم.
- إذا كانت $f$ دالة فردية فإن أصل المعلم ، مركز تماثل منحناها $(C_f)$.

## مثال

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\begin{cases} x\sqrt[3]{2-x}, x\le 2 \\ (4-x)\sqrt[3]{x-2}, x>2 \end{cases}$

و ليكن $(C_f)$ منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

➢ لنبين أن المستقيم الذي معادلته $x=2$ محور تماثل للمنحنى $(C_f)$.

لدينا: $D_f=]-\infty,+\infty[$ إذن لكل $x$ من $D_f$ ، $(4-x)\in D_f$.

و لكل $x$ من $D_f$:

- إذا كان $x>2$ فإن $(4-x)<2$ و لدينا $f(4-x)=(4-x)\sqrt[3]{2-(4-x)}=(4-x)\sqrt[3]{x-2}=f(x)$
- إذا كان $x<2$ فإن $(4-x)>2$ و لدينا $f(4-x)=(4-(4-x))=x\sqrt[3]{2-x}=f(x)$
- إذا كان $x=2$ فإن أيضا $f(4-x)=f(x)$

إذن المستقيم الذي معادلته $x=2$ محور تماثل للمنحنى $(C_f)$.

## IV)- أمثلة من دراسة دالة عددية

### مثال1: دراسة دالة حدودية

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$.

1) - حدد $D_f$ ، ثم أحسب النهايات عند محدات $D_f$.

2) – أ- بين أن $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=x(x^2-x-2)$.

ب- أدرس تغيرات الدالة $f$.

3)- أ- حدد تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري المعلم.

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$.

4)- أرسم المنحنى $(C_f)$ في معلم متعامد ممنظم.

### مثال3: دراسة دالة مثلثية

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{1-\cos 4x}$،

و ليكن $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) - حدد $D_f$ ، مجموعة تعريف الدالة $f$.

2) – أ- بين أن $\forall x\in D_f, f(x)=\frac{1}{4\sin 2x}$.

ب - بين أن $f$ دالة دورية دورها $\pi$ .

ج- بين أن $f$ فردية ثم استنتج أن مجموعة دراسة الدالة $f$ هي $D_E=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3)- أ- أدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $D_E=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

ب- أنشئ المنحنى $(C_f)$ على المجموعة $[-\pi,\pi]\cap D_f$

## مثال2 : دراسة دالة جذرية

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+4x}{x+1}$.

1) – أ- حدد $D_f$ ، ثم أحسب النهايات عند محدات $D_f$.
ب- بين أن النقطة $\Omega(-1,2)$ مركز تماثل منحنى الدالة $f$

2) – أ- بين أن $\forall x\in D_f, f'(x)=\dfrac{(x+1)^2+3}{(x+1)^2}$.
ب- استنتج رتابة الدالة $f$ على كل من المجالين $]-1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$.

3) – أ- حدد تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري المعلم.
ب- أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة $f$.
ج- أرسم المنحنى $(C_f)$ في معلم متعامد ممنظم.

4) - لتكن $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=]-1,+\infty[$.
أ- بين أن الدالة $g$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ ينبغي تحديده.
ب- بين أن $g^{-1}$ قابلة للاشتقاق في $0$ ثم أحسب $(g^{-1})'(0)$.
ج- حدد التعبير $g^{-1}(x)$ لكل $x$ من المجال $J$

## مثال4: دالة تحتوي على الجذر من الرتبة $n$.

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[\dfrac{-1}{3},+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=-x+\left(\sqrt[3]{1+3x}\right)^2$ .

1)- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2)- أ – ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ في النقطة $-\dfrac{1}{3}$ على اليمين ثم أول النتيجة هندسيا .
ب- بين أن $\forall x\in\left]-\dfrac{1}{3},+\infty\right[, f'(x)=\dfrac{7-3x}{\sqrt[3]{1+3x}\left(4+2\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1+3x}^2\right)}$.
ج – أدرس إشارة $f'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) – بين أن منحنى الدالة $f$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=-x$

4) – نعتبر الدالة $g$ المعرفة بما يلي : $g(x)=f(x)-x$
أ – بين أن الدالة $g$ تناقصية قطعا على المجال $[0,2]$ .
ب – استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[0,2]$ .
ج- بين أن العدد $\alpha$ يحقق $8\alpha^3-\alpha^2-6\alpha-1=0$.

5) – أرسم منحنى الدالة $f$ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

## مثال5: دالة تحتوي على الجذر من الرتبة $n$.

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{3}x-\sqrt[3]{x}$ .

1)-أ- حدد $D_f$ , مجموعة تعريف الدالة $f$ .

ب- أحسب : $f(0)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .

2)-أ- أدرس قابلية اشتقاق $f$ في الصفر على اليمين ثم أول النتيجة هندسيا .

ب- بين أن : $\forall x\in ]0,+\infty[ , f'(x)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$.

ج- أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$ .

3)-أ- أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$.

ب-أرسم منحنى الدالة $f$ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.