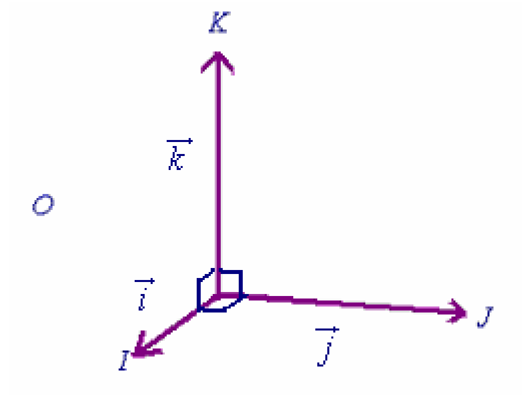
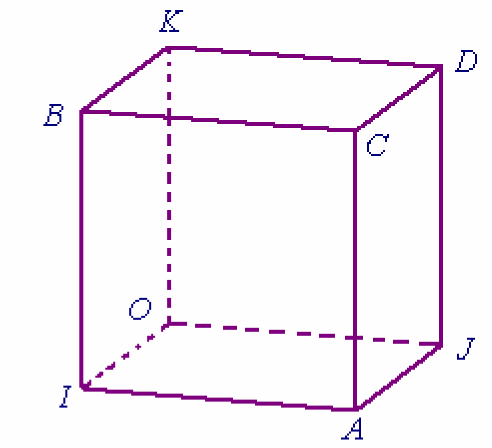
I. تعريف :

1. مثال : ليكن $OIAJKBCD$ مكعبا حيث $OI=1$. الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، حيث : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$.





1. أعط مثلثوث إحداثيات :

أ- النقط : O و I و J و K و A و B و C و D .

ب- المتجهتين : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OC}$.

2. نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، النقطة $E(1,2,0)$.

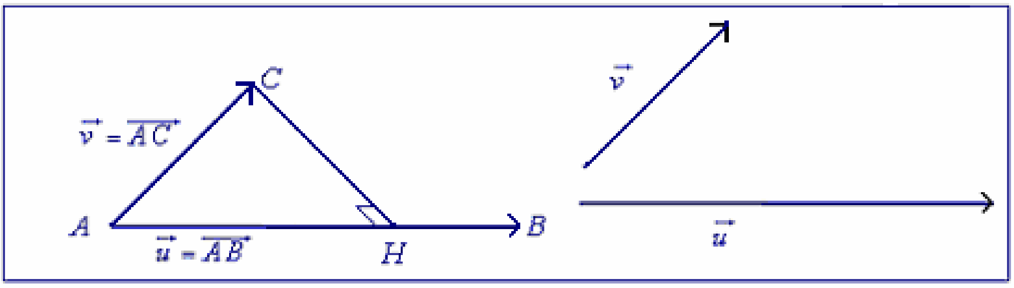
أ- تحقق من أن النقطة A منتصف القطعة $[IE]$ ؛ ثم أنشئ النقطة E.

ب- أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IE}$.

2. تعريف :

أ- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من $\mathcal{V}_3$ ، ولتكن A نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$.

توجد نقطتان وحيدتان من $(\mathcal{E})$ بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.



الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي : $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}}$.

حيث H هو المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

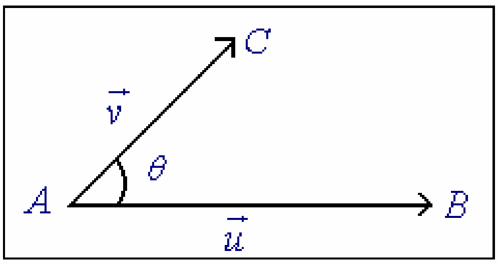
ب- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ ، فإن $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=0}$.

3. خاصية : « الصيغة المثلثية للجداء السلمي »

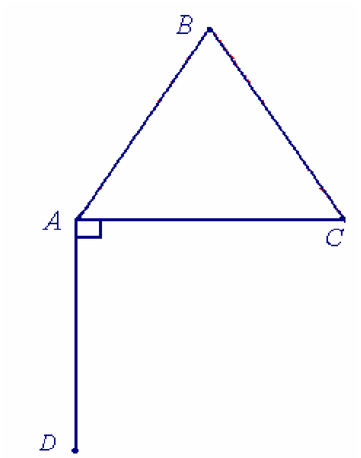
لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من $\mathcal{V}_3$ ، ولتكن A و B و C ثلاث نقط من الفضاء $(\mathcal{E})$ بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ ، وليكن θ قياسا للزاوية الهندسية $[B\widehat{A}C]$.

لدينا :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= AB\times AC\times\cos(\theta)\\ \vec{u}.\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\theta)\end{aligned}}$$



مثال : ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع حيث : $AB=3$.



أحسب :
(a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

(b $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

(c $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$

ملاحظة : الجداء السلمي $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$ يرمز له بالرمز $\overrightarrow{AC}^2$

ولدينا : $AC^2=\overrightarrow{AC}^2$. أي : $\|\overrightarrow{AC}\|^2=\overrightarrow{AC}^2$.

4. خاصيات :

أ- لكل A و B من $(\mathcal{E})$ ، لدينا : $AB^2=\overrightarrow{AB}^2$. ومنه : $\boxed{AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}}$.

ب- لكل متجهة $\vec{u}$ من $\mathcal{V}_3$ ، لدينا: $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2$. ومنه : $\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}}$.

جـ- لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $\mathcal{V}_3$، لدينا $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0} \text{ أو } \vec{v}=\vec{0} \text{ أو } \vec{u}\perp\vec{v}}$.

د- لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من $\mathcal{V}_3$، ولكل α من $\mathbb{R}$ ، لدينا :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \vec{u}.\vec{v} & = & \vec{v}.\vec{u} \\ \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) & = & (\vec{u}.\vec{v})+(\vec{u}.\vec{w}) \\ (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} & = & (\vec{u}.\vec{w})+(\vec{v}.\vec{w}) \\ \vec{u}.(\alpha\vec{v}) & = & \alpha(\vec{u}.\vec{v}) \end{array}}$$

هـ- لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $\mathcal{V}_3$، لدينا :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (\vec{u}+\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2 \\ (\vec{u}-\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2 \\ (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) & = & \vec{u}^2-\vec{v}^2 \end{array}}$$

مثال : لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من $\mathcal{V}_3$، بحيث : $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{3}$ و $\vec{u}.\vec{v}=-5$.

1. أحسب $(\vec{u}+\vec{v})^2$ ثم استنتج $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

2. أ- أحسب $(\vec{u}+2\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$. ب- ماذا تستنتج ؟

II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

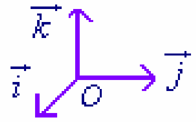
1. الأساس والمعلم :

تعريف :

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائية من الفضاء $\mathcal{V}_3$ و لتكن O نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$.

✓ نقول إن المثلوث $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **أساس متعامد ممنظم** للفضاء $\mathcal{V}_3$ ، إذا كان :

$\vec{i}\perp\vec{j}$ و $\vec{j}\perp\vec{k}$ و $\vec{k}\perp\vec{i}$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$



✓ إذا كان $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساسا متعامدا ممنظما للفضاء $\mathcal{V}_3$ ، فإننا نقول :

إن المربوع $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ **معلم متعامد ممنظم** للفضاء $(\mathcal{E})$.

2. الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

في كل ما يلي ، الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

لتكن $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ متجهتين من الفضاء $\mathcal{V}_3$. لدينا :

$$\vec{u}.\vec{v} = \left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right).\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx'\vec{i}^2+xy'\vec{i}.\vec{j}+xz'\vec{i}.\vec{k}+yx'\vec{j}.\vec{i}+yy'\vec{j}^2+yz'\vec{j}.\vec{k}+zx'\vec{k}.\vec{i}+zy'\vec{k}.\vec{j}+zz'\vec{k}^2$$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'$$

لأن : $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$.

خلاصة :

إذا كانت $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ متجهتين من الفضاء $\mathcal{V}_3$ ، فإن :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'}$$

3. نتائج :

أ- لكل متجهة $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ من $\mathcal{V}_3$ ، لدينا : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$. ومنه فإن :

$$\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ب- لكل نقطتين $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ من الفضاء $(\mathcal{E})$ ، لدينا:

$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$. ومنه فإن منظم المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو:

$$\boxed{AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}}$$

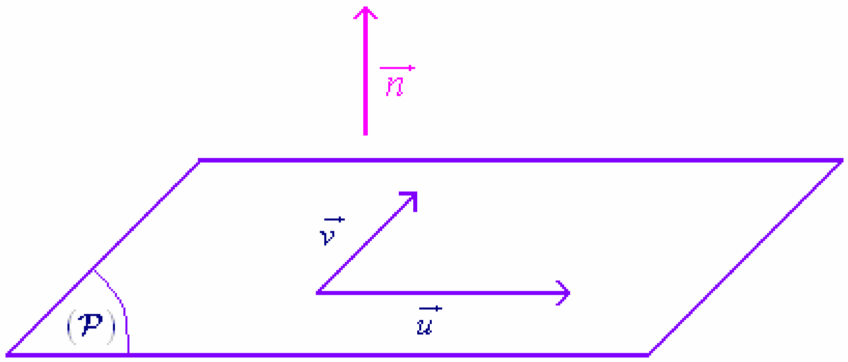
مثال : لتكن $A\left(1,0,1\right)$ و $B\left(1,0,0\right)$ و $C\left(1,1,1\right)$ ثلاث نقط من الفضاء $(\mathcal{E})$. بين أن ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة A .

III. تطبيقات :

1. متجهة منظمية على مستوى :

في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، نعتبر المستوى $(\mathcal{P})$ الموجه بمتجهتين غير مستقيميتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء $\mathcal{V}_3$.

كل متجهة غير منعدمة $\vec{n}$ من $\mathcal{V}_3$ متعامدة مع $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، تسمى متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$



ملاحظات : أ- كل مستوى يقبل ما لا نهاية له من المتجهات المنظمية عليه.

ب- إذا كانت $\vec{n}$ متجهة منظمية على مستوى $(\mathcal{P})$ ، فإن $\vec{n}$ متعامدة مع كل متجهة $\overrightarrow{AB}$ حيث A و B نقطتين من المستوى $(\mathcal{P})$.

2. معادلة مستوى محدد بنقطة ومتجهة منظمية عليه :

نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، المستوى $(\mathcal{P})$ المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ حيث $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية عليه. $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$. لدينا :

$$\begin{aligned} M\in(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0 \\ &\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0 \end{aligned}$$

حيث : $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.

أ- خاصية :

المستوى $(\mathcal{P})$ المار من نقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية عليه، يقبل معادلة ديكارتية على الشكل : $ax+by+cz+d=0$.

ب- مثال : أكتب معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$ المارمن النقطة $E(2,-1,3)$ و $\vec{n}(5,2,1)$ منظمية عليه .

3. تعامد مستقيمين :

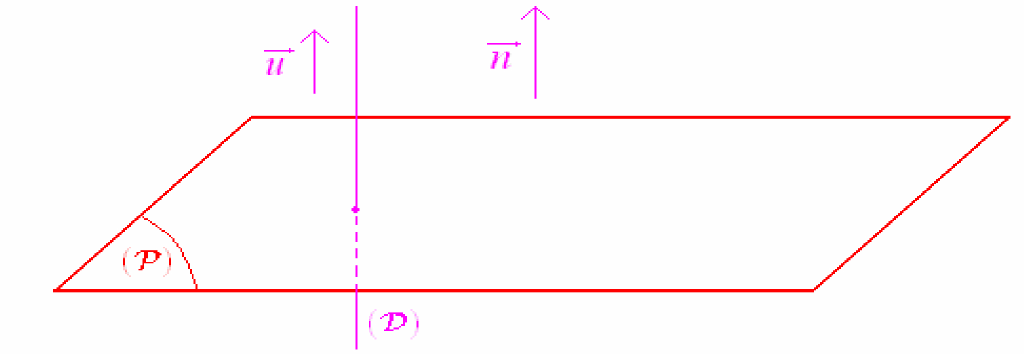
ليكن $(\mathcal{D})$ مستقيما مارا من نقطة A وموجها بمتجهة $\vec{u}$ و ليكن $(\mathcal{D}')$ مستقيما مارا من نقطة B و موجها بمتجهة $\vec{v}$. لدينا :

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathcal{D})\perp(\Delta) &\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \\ &\Leftrightarrow \vec{u}\vec{v}=0 \end{aligned}}$$

4. تعامد مستقيم ومستوى :

ليكن $(\mathcal{D})$ مستقيما مارا من نقطة A وموجها بمتجهة $\vec{u}$ و ليكن $(\mathcal{P})$ مستوى مارا من نقطة B و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه . لدينا :

$\boxed{(\mathcal{D})\perp(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \text{مستقيميتان } \vec{u} \text{ و } \vec{n}}$.

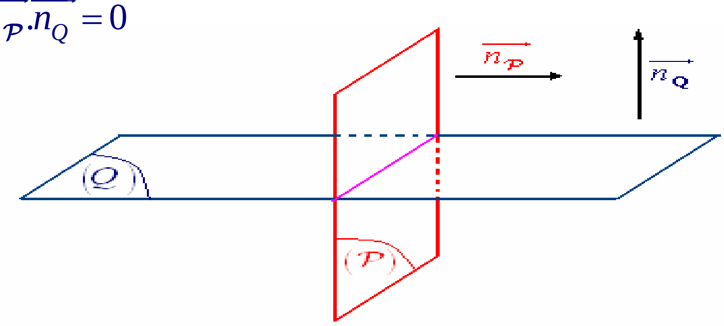


5. تعامد مستويين :

ليكن $(\mathcal{P})$ مستوى مارا من نقطة A و $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ متجهة منظمية عليه وليكن (Q) مستوى مارا من نقطة B و $\vec{n}_Q$ متجهة منظمية عليه . لدينا :

$$(\mathcal{P})\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}_{\mathcal{P}}\perp\vec{n}_Q$$

$$(\mathcal{P})\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}_{\mathcal{P}}.\vec{n}_Q=0$$



تمرين تطبيقي :

نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$، المستوى $(\mathcal{P})$ والمستقيم $(\mathcal{D})$ حيث :

$$(\mathcal{D}) \; : \; \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 5 \\ z = -1+6t \end{cases} \quad / \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad (\mathcal{P}) \; : \; x-3z+4=0$$

أ- بين أن : $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$.

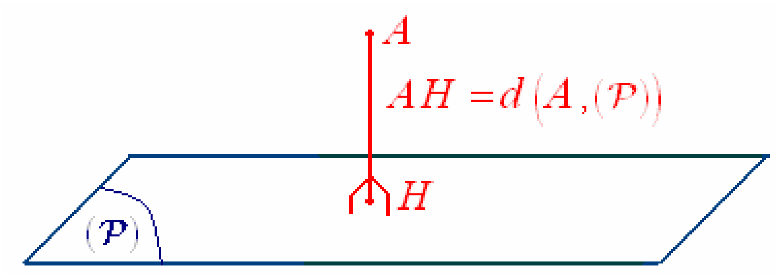
ب- نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$، المستوى $(Q) \; : \; 3x+y+z+1=0$. بين أن : $(\mathcal{P}) \perp (Q)$.

6. مسافة نقطة عن مستقيم :

خاصية :

نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ والمستوى $(\mathcal{P}): \; ax+by+cz+d=0$. مسافة النقطة A عن المستوى $(\mathcal{P})$ هي :

$$\boxed{d\left(A,(\mathcal{P})\right) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$



برهان :

نعتبر $H(x, y, z)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستوى $(\mathcal{P})$. لدينا :

$\overrightarrow{AH}(x-x_A, y-y_A, z-z_A)$ و $\vec{n}(a,b,c)$ متجهتان منظميتان على المستوى $(\mathcal{P})$. إذن :

$\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}$ متجهتان مستقيميتان. أي : $\overrightarrow{AH} = t\vec{n} \quad / \quad \exists t \in \mathbb{R}$. ومنه فإن : $\begin{cases} x-x_A = ta \\ y-y_A = tb \\ z-z_A = tc \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}$. وبما أن $H \in (\mathcal{P})$ ، فإن: $a(x_A+t.a)+b(y_A+t.b)+c(z_A+t.c)+d=0$

نستنتج من ذلك أن : $ax_A+by_A+cz_A+t(a^2+b^2+c^2)+d=0$ أي : $t = -\dfrac{ax_A+by_A+cz_A+d}{a^2+b^2+c^2}$.

وبالتالي فإن مسافة النقطة A عن المستوى $(\mathcal{P})$ هي : $d\left(A,(\mathcal{P})\right) = AH$. ولدينا :

$$AH = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \left\|t\vec{n}\right\| = |t|\left\|\vec{n}\right\| = \left|-\frac{ax_A+by_A+cz_A+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \; .$$

مثال : في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، نعتبر النقطتين $A\left(-1,2,\sqrt{5}\right)$ و $B(3,1,0)$ والمستوى $(\mathcal{P}): \; 4x+2y+\sqrt{5}z-14=0$. أحسب :

أ- المسافة $d\left(A,(\mathcal{P})\right)$. ب- المسافة $d\left(B,(\mathcal{P})\right)$. ماذا تستنتج ؟