www.bramaths.com

BR@M@THS

الهندسة الفضائية

I.تحليلية الفضاء

1.استقامية متجهتين:

- تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين مستقيمتين إذا وفقط إذا كانت $d_1 = d_2 = d_3 = 0$
- تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين إذا وفقط إذا كانت $d_1 \neq 0$ أو $d_2 \neq 0$ أو $d_3 \neq 0$

$$d_3 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad d_2 = \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad d_1 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

d_1 و d_2 و d_3 تسمى المشتقات المستخرجة ل$\vec{u}$ و $\vec{v}$

2 . استوائية ثلاث متجهات:

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا تحقق محددة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ تساوي 0 أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا تحقق $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = a'\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

3.المستقيم :

أ- التمثيل البارامتري لمستقيم: $(D)(A;\vec{u})$ حيث $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$

أي $(\forall M(X;y;z) \in (D))(\exists \alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{U}$
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \beta b \\ z = z_0 + \gamma c \end{cases} \quad (\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbb{R}^3$$
التمثيل البارامتري

ب- معادلتان ديكارتيتان لمستقيم

$(D)(A;\vec{u})$ حيث $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ $\forall M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (D)$ أي $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمتان أي أن

المحددات المستخرجة المرتبطة بها منعدمة

لتحديد معادلتان ديكارتيتان لمستقيم ما نعتمد الطريقة $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

4 . المستوى

ليكن $P\left(A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix};\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix};\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\right)$. $\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(P)$ أي أن المتجهات $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية .

أ - التمثيل البارامتري للمستوى

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in P\right)\left(\exists(\alpha.\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{U}+\beta\vec{V}\qquad(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\quad\begin{cases}x=x_0+\alpha a+\beta a'\\y=y_0+\alpha b+\beta b'\\z=z_0+\alpha c+\beta c'\end{cases}$$

التمثيل البارامتري للمستوى

ب معادلة ديكارتية للمستوى

لتحديد معادلة ديكارتية للمستوى نحسب المحددة $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

5.الأوضاع النسبية

أ- لمستقيمين

-إذا كان $d_1=d_2=d_3=0$ فان $(D)//(D')$

- إذا كان $d_1\neq0$ أو $d_2\neq0$ أو $d_3\neq0$ فان (D) لايوازي (D')

ملاحظة : (D) لايوازي $(D)\Leftarrow(D')$ و (D') متقاطعان أو غير مستوائيان . في البحث عن التقاطع إذا كان للنظمة المشتركة لمستقيمين حل نقول إن (D) و (D') متقاطعان . إذا لم يكن للنظمة حل نقول إن (D) و (D') غير مستوائيان .

ب-لمستقيم ومستوى

نعتبر $D(A;\vec{u})$ و $P(B;\vec{V};\vec{w})$

- $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0\ \Leftarrow\ (P)//(D)$

- $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq0\ \Leftarrow\ (D)$ يخترق المستوى (p)

ج- لمستويين

ليكن $P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $P'(B;\vec{u}';\vec{v}')$

- $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')=0$ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')=0\Leftarrow$ $(P)//(P')$

- $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')\neq0$ $(S)\cap(P)=\{A\}$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')\neq0\Leftarrow$ (P) لايوازي (P')

II.الجداء السلمي والمتجهي

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين

الجداء السلمي لـ$\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=aa'+bb'+cc'$

إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ فان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

الجداء المتجهي لـ$\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المثلوث

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\left(\begin{vmatrix}b&b'\\c&c'\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}a&a'\\c&c'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a&a'\\b&b'\end{vmatrix}\right)$$

III. المسافة

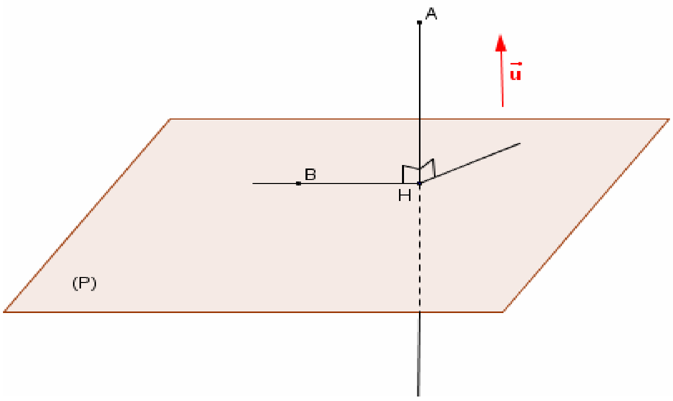
المسافة بين نقطتين او المنظم

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

المسافة بين نقطة ومستوى

$$d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مع $A(x_A;x_B;x_C)$ و $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P)



المسافة بين نقطة ومستقيم

ليكن $(D)(A;\vec{u})$ و M نقطة من المستوى . مسافة النقطةM عن المستقيم (D) هي

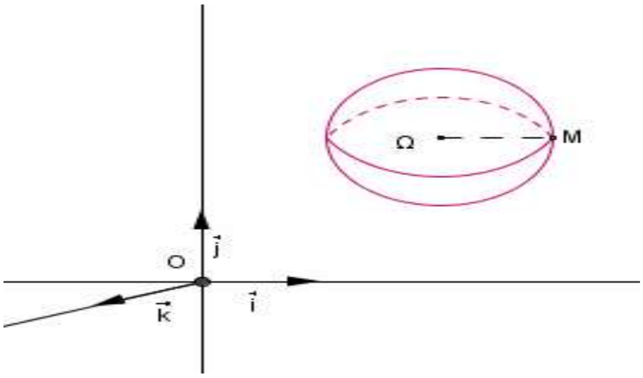
$$d(M;(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{U}\right\|}{\left\|\vec{U}\right\|}$$

IV. الفلكة Sphère

1. معادلة ديكارتية للفلكة

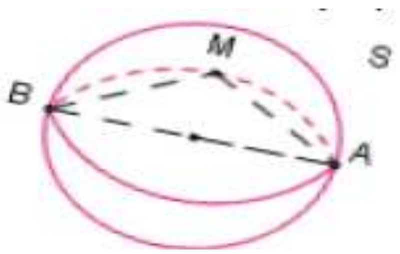
ا – معادلة ديكارتية للفلكة معرفة بالمركز $\Omega(a;b;c)$ والشعاع r هي

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$



ب - معادلة ديكارتيةللفلكة معرفة بأحد أقطارها $[AB]$ لتحديد هده المعادلة

نحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$



V.الأوضاع النسبية لفلكة ومستوى

S فلكة مركزها Ω وشعاعها R و (P) مستوى معادلته الديكارتية

$ax+by+cz+d=0$.

لدراسة الوضع النسبي بين S و (P) نحسب مسافة المركز عن المستوى ونقارنها مع الشعاع وهناك ثلاث حالات :

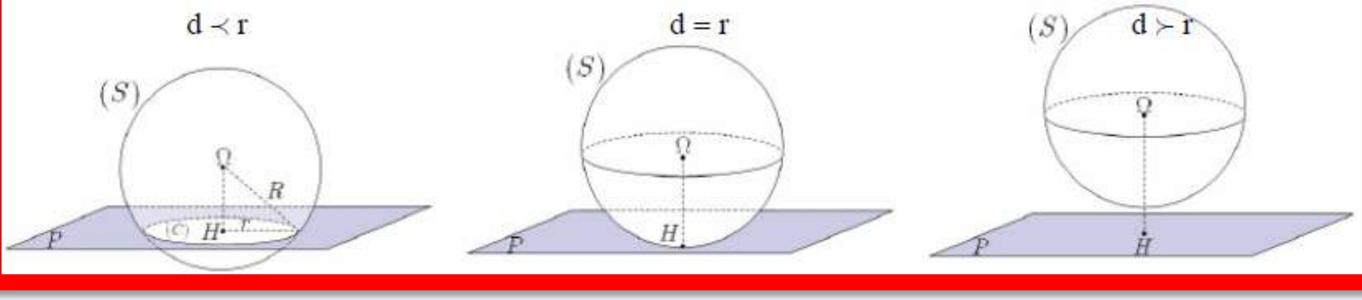
أ - إذا كان $d \succ R$ فان $(S)\cap(P)=\varnothing$

ب -إذا كان $d=R$ فان $(S)\cap(P)=\{A\}$ ((P) مماس ل S فيA)

ج- إذا كان $d \prec R$ فان $(S)\cap(P)=\zeta(o;r)$

(النقطة o مركز الدائرة هي المسقط العمودي لمركز الفلكة على المستوى (P) .

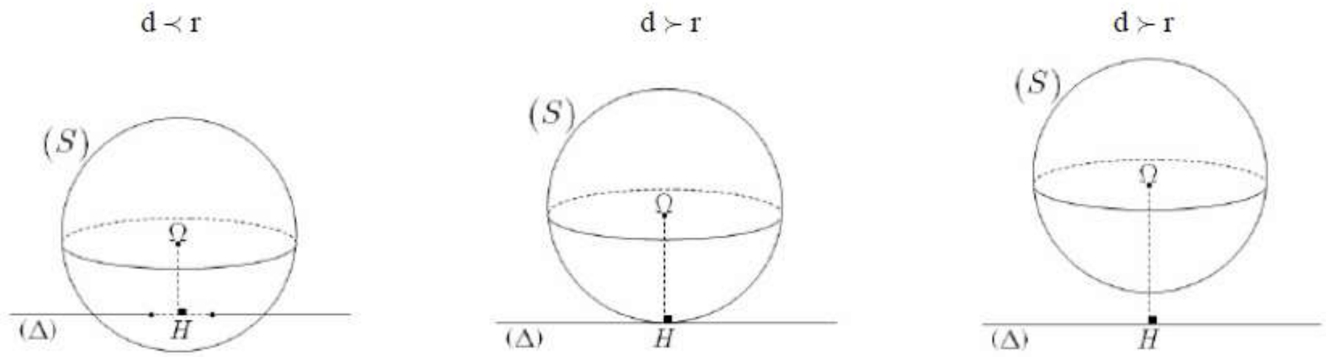
لتحديد شعاع الدائرةr ($r=\sqrt{R^2-d^2}$)



VI-الأوضاع النسبية لفلكة ومستقيم

لدراسة الوضع النسبي بين (S) و (Δ) نحسب المسافة بين مركز الفلكة والمستقيم ونقارنها مع الشعاع وهناك أيضا3 حالات :

- **إذا كان** $d \succ R$ **فإن** $(S)\cap(\Delta)=\varnothing$ **(** (D) **خارج الفلكة)**
- **إذا كان** $d = R$ **فإن** $(S)\cap(\Delta)=\{H\}$ **(** (D) **مماس للفلكة)**
- **إذا كان** $d \prec R$ **فإن** $(S)\cap(\Delta)=\{A;B\}$ **(** (D) **قاطع للفلكة)**



تقاطع المستقيم (Δ) الفلكة S هو المجموعة الفارغة

المستقيم (Δ) الفلكة S يتقاطعان في النقطة H

المستقيم (Δ) يخترق الفلكة S في نقطتين مختلفتين