الهندسة الفضائية

الجداء السلمي في الفضاء

http://www.meljohra.ift.cx

EL JOHRA MOHAMED
16/06/2009

الجداء السلمي في الفضاء

الحصة رقم 1

I. تعريف متجهي للجداء السلمي

1. تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$. و A نقطة من الفضاء الإقليدي $\mathcal{E}$.

توجد نقطتان B و C من $\mathcal{E}$ بحيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

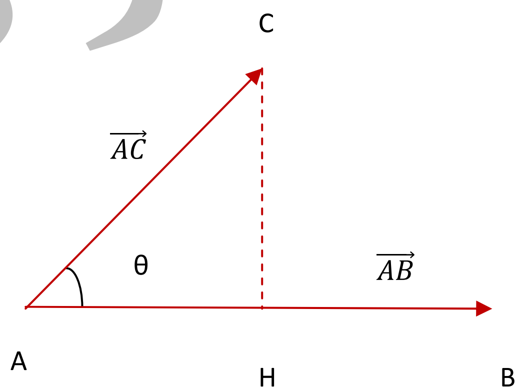
الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو الداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ في المستوى $(\mathcal{P})$ المحدد بالنقط A و B و C

و نكتب : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

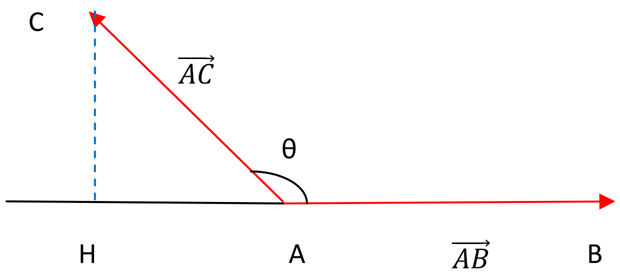
2. توضيح

ليكن θ قياسا للزاوية $(\widehat{BAC})$ و H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

إذا كان $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos(\theta) = AB.AH$



إذا كان $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos(\theta) = -AB.AH$



إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = AB.AC.cos($\frac{\pi}{2}$) = 0

3. خاصية 1

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

4. تمرين تطبيقي 1

ليكن ABCDEFGH مكعبا.

1. أحسب $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BF}$
2. بين أن $\overrightarrow{} \perp \overrightarrow{}$
3. تحقق أن $(DH) \perp (EFG)$
4. استنتج أن $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{FH} = 0$

5. الحل

الحصة رقم 2

6. خاصيات الجداء السلمي

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$ و لكل α من $\mathbb{R}$ لدينا :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $(\alpha.\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$

7. تمرين

ليكن ABCD رباعي أوجه منتظم طول حرفه a

لتكن J و K على التوالي منتصفي القطعتين [BC] و [AD].

1. أحسب $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$
2. استنتج $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD}$
3. احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$
4. استنتج حساب $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{CK}$ بدلالة a

8. الحل

الحصة رقم 3

II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي

1. منظم متجهة

نضع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة

لدينا : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$

و منه $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \|\overrightarrow{AB}\|$

2. خاصية 1

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$ و و لكل α من $\mathbb{R}$ لدينا :

- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- $\|\alpha.\vec{u}\| = |\alpha|.\|\vec{u}\|$
- المثلثية المتفاوتة : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

3. خاصية 2: المتطابقات الهامة

❖ $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

❖ $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

❖ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

4. المعلم و الأساس المتعامدان الممنظمان

نقول إن الأساس $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath},\vec{k})$ متعامد ممنظم إذا كانت المتجهات $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى و واحدية :

أي $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{\imath}.\vec{k} = 0$ و $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$

و نقول إن المعلم $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath},\vec{k})$ متعامد ممنظم

5. الصيغة التحليلية للجداء السلمي و لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

في كل ما يلي الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath},\vec{k})$

a. خاصية 1

لكل متجهتان : $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ من $\mathcal{V}_3$.

لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

b. نتائج

لكل $\vec{u}(x,y,z)$ من $\mathcal{V}_3$. لدينا : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

لكل نقطتان $A\,(x_A\,,y_A\,,z_A)$ و $B\,(x_B\,,y_B\,,z_B)$ من الفضاء الإقليدي $\mathcal{E}$.

لدينا : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$

6. تمرين 1

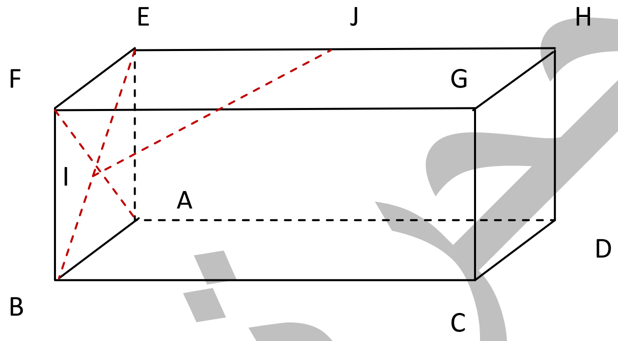
ABCDEFGH متوازي مستطيلات قائم بحيث AB=AE=2 و AD=4 , ليكن I مركز المربع ABFE و J منتصف القطعة [EH]

نضع $\vec{\imath} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$ و $\vec{\jmath} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{AD}$ و $\vec{k} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AE}$

1. **تحقق أن $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath},\vec{k})$ متعامد ممنظم**

نعتبر الفضاء منسوبا للمعلم $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath},\vec{k})$

2. **حدد إحداثيات النقط I و J و K .**
3. **أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JG}$ و المسافتين JI و JG**



7. الحل

الحصة رقم 4

III. تطبيقات الجداء السلمي

1. تحديد تحليلي للمجموعة : $\{M\in\mathcal{E}\ ;\ \vec{u}.\overrightarrow{AM}=k\}$

c. نشاط 1

نعتبر النقطتين A(1 , -1 , 2) و B(-1 , 0 , 1) و المتجهة $\vec{u}(1,-2,3)$

حدد (E) مجموعة النقط M(x,y,z) من الفضاء الإقليدي $\mathcal{E}$ بحيث $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=2$

d. الحل

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=2 \Leftrightarrow 1(x-1)-2(y+1)+3(z-2)=2$$

و منه x – 2 y + 3 z – 11 =0 وهي معادلة مستوى

e. خاصية

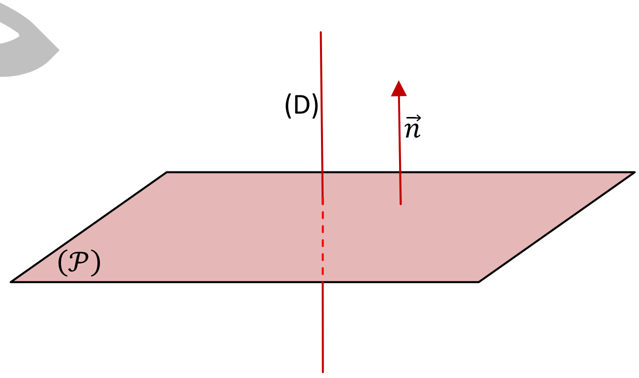
لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ متجهة غير منعدمة . و A نقطة من الفضاء الإقليدي $\mathcal{E}$ ، و k عدد حقيقي

مجموعة النقط M(x,y,z) من الفضاء $\mathcal{E}$ بحيث $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ هي مستوى معادلته الديكارتية على شكل:

a x + b y + c z + d = 0

2. تعريف

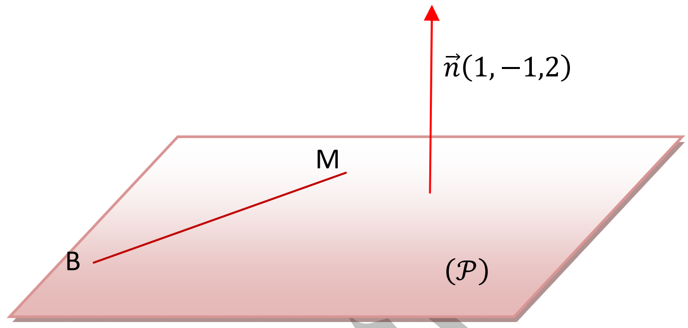
نسمي متجهة منظمية على مستوى $(\mathcal{P})$ كل متجهة $\vec{n}$ غير منعدمة موجهة لمستقيم عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$



3. مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية

a. نشاط 1

لنحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من B(-1,0,1) و المتجهة $\vec{n}(1,-1,2)$ منظمية عليه



لكل **M(x,y,z)** من المستوى (P) لدينا المتجهتان $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{n}$ متعامدتان

و منه $\overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0$

و منه **1(x+1)-1(y-0)+2(z-1)=0**

و منه معادلة المستوى (P) هي : **x - y + 2 z - 1 = 0**

b. خاصية 1

كل مستوى $(\mathcal{P})$ في الفضاء و $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع **ax + by + cz +d = 0**

عكسيا نعتبر النشاط التالي:

c. نشاط 2

نعتبر المستوى (Q) ذي المعادلة الديكارتية **3x + 2y – z + 1 = 0**

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى (Q)
2. استنتج متجهتين $\vec{v}$ و $\vec{w}$ موجهتين للمستوى (Q)
3. تحقق أن المتجهة $\vec{n}(3,2,-1)$ منظمية على المستوى (Q)
4. ضع نص الخاصية المحصل عليها

d. الحل

1. لدينا : $3x+2y-z+1=0 \Rightarrow z=1+3x+2y$

لنضع x = t و y = k

إذن $\begin{cases} x=0+1t+0k \\ y=0+0t+1k \\ z=1+3t+2k \end{cases}$ وهو تمثيل بارامتري للمستوى (Q)

2. الإستنتاج

من التمثيل البارامتري السابق نستنتج أن $\vec{v}(1,0,3)$ و $\vec{w}(0,1,2)$ متجهتان موجهتان للمستوى (Q)

3. التحقق

نضع $\vec{n}(3,2,-1)$ و $\vec{v}(1,0,3)$ و $\vec{w}(0,1,2)$

ومنه $\vec{n}.\vec{v} = 1\times 3 + 0\times 2 + 3\times(-1) = 0$ إذن $\vec{n}\perp\vec{v}$

و $\vec{n}.\vec{w} = 0\times 3 + 1\times 2 + 2\times(-1) = 0$ إذن $\vec{n}\perp\vec{w}$

e. خاصية

كل معادلة ديكارتية من نوع ax + by + cz + d = 0 حيث (a,b,c) ≠(0,0,0) فهي معادلة مستوى بحيث $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية عليه

الحصة رقم 5

4. مسافة نقطة عن مستوى

a. خاصية

مسافة النقطة $A\,(x_A\,,y_A\,,z_A)$ عن المستوى $(\mathcal{P})$ ذي المعادلة a x + b y + c z + d = 0 هي :

$$d(A;\mathcal{P}) = \frac{|ax_A+by_A+c\,z_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

b. تطبيق

نعتبر النقطتين A(1,-1,2) و H(2,0,1) و المستويين : (P) : x + y - z - 1 = 0 و (Q) : 2 x + y – z + 1 = 0

1. أحسب مسافة النقطة A عن المستوى (P)
2. بين أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على (P)
3. أحسب d(A, (Q)) ؟ ماذا تستنتج ؟

c. الحل

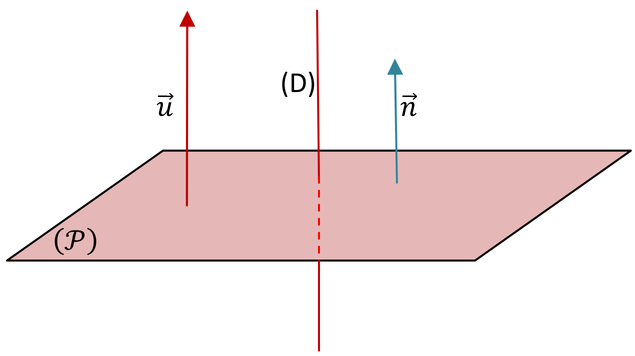
IV. الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى و لمستويين

1. خاصية

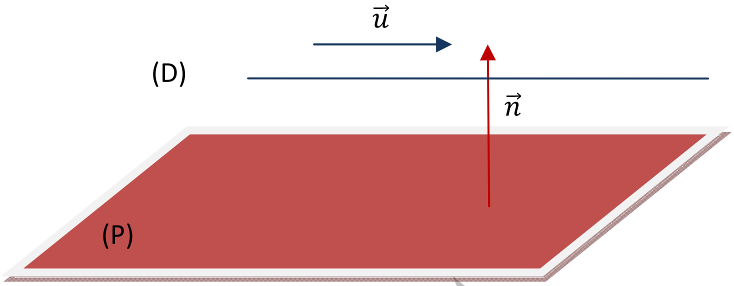
نعتبر (P) و (Q) مستويين و مستقيما(D) = D(A ; $\vec{u}$)

و ليكن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متجهتين منظميتين على (P) و (Q)

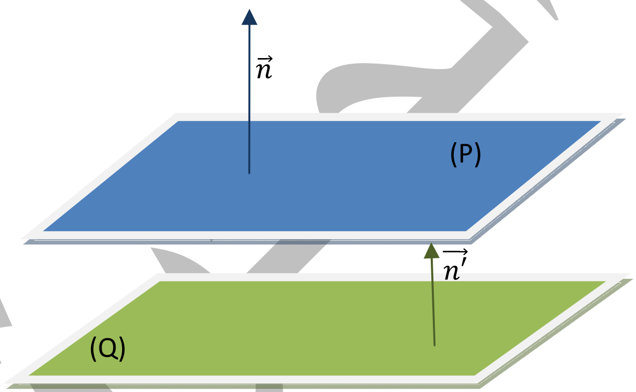
يكون $(\boldsymbol{P}) \perp (\boldsymbol{D})$ إذا وفقط إذا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين



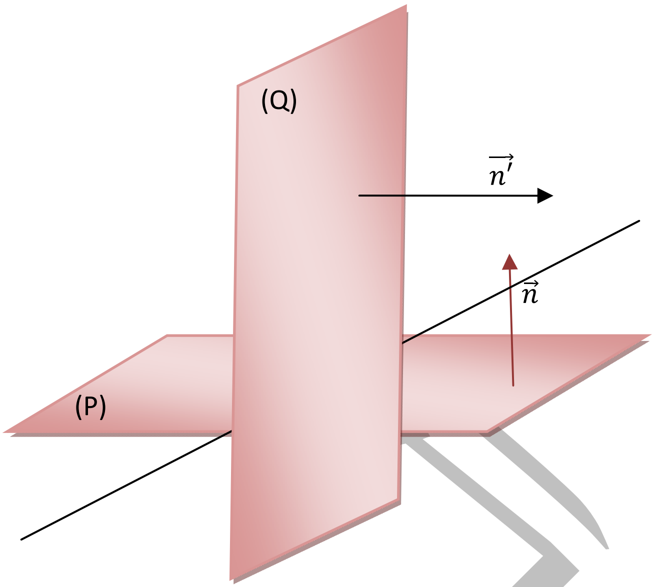
يكون $(P)//(D)$ إذا وفقط إذا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدتين أي ($\overrightarrow{\ }.\vec{u} = 0$)



يكون $(P) \parallel (Q)$ إذا وفقط إذا $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مستقيميتين



يكون $(Q) \perp (P)$ إذا وفقط إذا $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متعامدتين أي ($\vec{n}.\vec{n'} = 0$)



2. ملاحظة

يكون المستويان (P) و (Q) متقاطعان إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مستقيميتين

3. تمرين تطبيقي

نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين ب: $(P) : 2x - 4y + z + 1 = 0$ و $(Q) : x + y + 2z - 3 = 0$.

1. بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدان ؟
2. حدد للمستوى (R) المار من $A(1,-1,1)$ و الموازي للمستوى (P)

4. الحل