المعادلات التفاضلية

EL JOHRA MOHAMED

2009

[Tapez le résumé du document ici. Il s'agit généralement d'une courte synthèse du document. Tapez le résumé du document ici. Il s'agit généralement d'une courte synthèse du document.]

meljohra@gmail.com
LYCEE ALLAL BEN ABDELLAH
SIDI AISSA BEN ALI
BENI MELLAL

المعادلات التفاضلية

الحصة رقم 1

I. تمهيد

II. معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

1. تعريف

a و b عددان حقيقيان

المعادلة $y' = a y + b$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى

كل دالة f تحقق $f' = a f + b$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y' = a y + b$

2. حالة خاصة b = 0

ليكن a عددا حقيقيا

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = a y$ هو مجموعة الدوال y المعرفة على IR بما يلي : $y(x) = k e^{a x}$ حيث k عدد حقيقي

3. ملاحظة

هناك حل وحيد يحقق الشرط البدائي $y(x_0) = y_0$ حيث x_0 و y_0 عددان حقيقيان معلومان

4. تطبيق 1 ص 219

حل المعادلة التفاضلية $(E) : 2 y' + 3 y = 0$

حدد الدالة f التي تحقق المعادلة التفاضلية (E) و بحيث : $f(2) = -1$

5. الحل

لدينا : $2\, y' + 3\, y = 0 \iff y' = \frac{-3}{2} y$

و بالتالي الحل العام للمعادلة (E) هو مجموعة الدوال y المعرفة ب : $y(x) = k\, e^{\frac{-3}{2}x}$ حيث k عدد حقيقي

لنحدد k م IR بحيث $f(2)=-1$

لدينا $f(x) = k\ ^{\frac{-3}{2}x}$

ومنه $f(2) = k\, e^{\frac{-3}{2}\times 2} = -1 \Rightarrow k\, e^{-3} = -1 \Rightarrow k = -e^3$

و منه $f(x) = -e^3 \times e^{\frac{-3}{2}x}$

أي $f(x) = -\, e^{\frac{-3}{2}(x-2)}$

الحصة رقم 2

6. حل المعادلة التفاضلية y ' = a y + b حيث a و b عددان حقيقيان و a ≠ 0

a. خاصية

ليكن a و b عددين حقيقين و a ≠ 0

الحل العام للمعادلة التفاضلية y ' = a y + b هو مجموعة الدوال y المعرفة على IR بما يلي : $y\,(x) = k\, e^{a\,x} - \frac{b}{a}$

حيث k عدد حقيقي

هناك حل وحيد يحقق الشرط البدائي $y(x_0) = y_0$ حيث x_0 و y_0 عددان حقيقيان معلومان

7. تطبيق 2 ص 219

حل المعادلة التفاضلية (E) : 2 y ' + y = 1

حدد الدالة f التي تحقق المعادلة التفاضلية (E) و بحيث : f(-1) = 2

8. الحل

و بالتالي الحل العام للمعادلة (E) هو مجموعة الدوال y المعرفة ب : $y(x) = k\, e^{\frac{-1}{2}x} + 1$

لنحدد k م IR بحيث f(-1) = 2

لدينا $f(x) = k\ {}^{\frac{-1}{2}x} + 1$

ومنه $f(-1) = 2 \Longrightarrow k\, e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2 \Longrightarrow k = e^{-\frac{1}{2}}$

و بالتالي $f(x) = \ {}^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} + 1$

الحصة رقم 3

III. معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

1. تعريف

ليكن a و b عددين حقيقين

المعادلة $y'' + a y' + b y = 0$ ، ذات المجهول الدالة y و حيث y' و y'' مشتقتيها الأولى و الثانية على التوالي ، تسمى معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية

2. حالات خاصة

a. حالة $a = b = 0$

إذن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = 0$ هي الدوال y المعرفة على IR ب : $y(x) = \alpha x + \beta$

b. حالة $a\neq 0$ و $b=0$

$$y''+ay'=0 \Leftrightarrow (y')'=-ay'$$

نضع $z = y'$ و منه $z' = -az$

ومنه

$$z = ke^{-ax} \Rightarrow y' = ke^{-ax}$$
$$\Rightarrow y(x) = -\frac{k}{a}e^{-ax} + \beta \quad ;(k,\beta)\in IR^2$$

و منه حلول المعادلة : $y'' + a y' = 0$ هي : $y(x) = -\frac{k}{a}e^{-ax} + \beta \quad ;(k,\beta)\in IR^2$

3. حل المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

a. تعريف

a و b عددان حقيقيان

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

b. خاصية

نعتبرالمعادلة التفاضلية $(E) : y'' + ay' + by = 0$ و $r^2 + ar + b = 0$ معادلتها المميزة و مميزها Δ

إذا كان $\Delta > 0$ للمعادلة المميزة حلان حقيقيان مختلفان r_1 و r_2 و مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على IR بما يلي : $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث $(\alpha,\beta)\in IR^2$

إذا كان $\Delta = 0$ للمعادلة المميزة حل مزدوج r_0 و مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على IR بما يلي :
$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ حيث $(\alpha, \beta) \in IR^2$

إذا كان $\Delta < 0$ للمعادلة المميزة حلان عقديان مترافقان $r_1 = p + i\,q$ و $r_2 = p - i\,q$ حيث p و q عددان حقيقيان مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على IR بما يلي : $y(x) = e^{px}\left(\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx)\right)$ حيث $(\alpha, \beta) \in IR^2$

c. خاصية

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية (E) يحقق الشرطين البدائيين $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$ حيث $(x_0, y_0, z_0) \in IR^3$

ملاحظة (حالة خاصة $b = \omega^2$ و $a = 0$)

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ حيث ω من *IR هي الدوال المعرفة ب :

$y(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ حيث $(\alpha, \beta) \in IR^2$

الحصة رقم 4

IV. تطبيقات ص 221