

المستوى: 2Bac PC+SVT	الدوال الأصلية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات : 05	Fonctions primitives	الأستاذ : محمد إعلو

الدوال الأصلية

أهداف الدرس

- ❖ تعرف الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال.
- ❖ تعرف الدالة الأصلية لدالة على مجال التي تحقق الشرط البدني .

القدرات المنتظرة

- ❖ تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية.
- ❖ استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال.

الامتدادات

- ❖ الدوال اللوغارتمية و الدوال الأسية.
- ❖ الحساب التكاملي.
- ❖ العلوم الفيزيائية و علوم الحياة و الأرض.

المستوى: 2Bac PC+SVT	الدوال الأصلية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات: 05	Fonctions primitives	الأستاذ: محمد إعلو

(I)- دالة أصلية لدالة على مجال تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ضمن \mathbb{R} .
نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I ، كل دالة F قابلة للاشتقاق على I بحيث $F' = f$.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = x + 2$.

➤ الدالة F المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ هي دالة أصلية لـ f على \mathbb{R} .

➤ الدالة G المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ هي أيضا دالة أصلية لـ f على \mathbb{R} .

خاصية 1

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ، و F دالة أصلية لها على I .
الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة على I بما يلي: $(k \in \mathbb{R}), x \mapsto F(x) + k$.

برهان

لدينا F دالة أصلية للدالة f على مجال I .

❖ إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على I فإن G قابلة للاشتقاق على I ولدينا $G' = f$

إذن $G' = F'$ أي $(G - F)' = 0$ على I ومنه $\exists k \in \mathbb{R} / G - F = k$ أي: $G(x) = F(x) + k$ لكل $x \in I$.

❖ عكسيا إذا كانت G دالة معرفة على I بما يلي: $G(x) = F(x) + k$ ، حيث $k \in \mathbb{R}$ فإن G قابلة للاشتقاق

على المجال I ولدينا $G' = F' = f$ ، ومنه G دالة أصلية للدالة f على المجال I .

خاصية 2

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ، و $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$.

إذا كانت f تقبل دالة أصلية على I فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I تحقق $G(x_0) = y_0$.

تمرين 01

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I =]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + 1$.

(1) - حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

(2) - حدد الدالة الأصلية G للدالة f على المجال I التي تحقق $G(1) = 0$.

خاصية 3

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I .

المستوى: 2Bac PC+SVT	الدوال الأصلية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات: 05	Fonctions primitives	الأستاذ: محمد إعلو

خاصية 4

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I ، و $k \in \mathbb{R}$.
إذا كانت F و G على التوالي الدالتين أصليتين للدالتين f و g على I فإن:
❖ الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I .
❖ الدالة kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I .

تمرين 02

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ -x+4, & x > 1 \end{cases}$$

(1) - بين أن الدالة f تقبل دوال أصلية على \mathbb{R} .
(2) - حدد الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R} .
(3) - حدد الدالة الأصلية G للدالة f على \mathbb{R} التي تحقق $G(0) = 0$.

(II) - جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

المجال I	الدوال الأصلية ل f على المجال I	الدالة f معرفة على مجال I
$]-\infty, +\infty[$	$x \mapsto ax+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a, (a \in \mathbb{R})$
$]-\infty, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto x$
$]-\infty, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto x^n, (n \in \mathbb{N}^*)$
$]-\infty, 0[$ أو $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}, (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto x^r, (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$
$]-\infty, +\infty[$	$x \mapsto -\cos x+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \sin x$
$]-\infty, +\infty[$	$x \mapsto \sin x+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \cos x$
$\left] -\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan x+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 1+\tan^2 x$

المستوى: 2Bac PC+SVT	الدوال الأصلية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات : 05	Fonctions primitives	الأستاذ : محمد إعلو

(III)- الدوال الأصلية و العمليات

ملاحظات	الدوال الأصلية ل f على المجال I	الدالة f معرفة على مجال I
u لا تنعدم على I	$x \mapsto \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)(u(x))^n, (n \in \mathbb{N}^*)$
u موجبة قطعا على I	$x \mapsto -\frac{1}{u(x)} + c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{u^2(x)}$
u موجبة قطعا على I	$x \mapsto \frac{1}{r+1} (u(x))^{r+1} + c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)(u(x))^r, (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$
	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)} + c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$
	$x \mapsto u(x) + v(x) + c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$
	$x \mapsto u(x)v(x) + c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
	$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)} + c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$
	$x \mapsto \frac{1}{a} u(ax+b) + c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(ax+b), a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$
	$t \mapsto \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$	$t \mapsto \cos(\omega t + \varphi), \omega \in \mathbb{R}^*, \varphi \in \mathbb{R}$
	$t \mapsto -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$	$t \mapsto \sin(\omega t + \varphi), \omega \in \mathbb{R}^*, \varphi \in \mathbb{R}$

تمرين 04

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بما يلي: $f(x) = x \cos x - \sin x$.

(1) - أحسب $f'(x)$ لكل x من $[0, \pi]$.

(2) - أ- استنتج الدوال الأصلية للدالة g المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بما يلي: $g(x) = x \sin x - \cos x$

ب- حدد الدالة الأصلية G للدالة g التي تحقق الشرط البدني $G(\pi) = 0$.

تمرين 05

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي: $f(x) = \tan^2 x$ و $g(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

❖ حدد الدوال الأصلية لكل من الدالتين f و g على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

المستوى: 2Bac PC+SVT	الدوال الأصلية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات: 05	Fonctions primitives	الأستاذ: محمد إعلو

تمرين 06

<p>لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.</p> <p>(1) - حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث: $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$.</p> <p>(2) - استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $[0, +\infty[$.</p> <p>(3) - استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $[0, +\infty[$ التي تحقق: $F(1) = \frac{5}{2}$.</p>
--

تمرين 07

<p>حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:</p> <p>$I =]-\infty, -1[, f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ $I = \mathbb{R}, f(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 1$</p> <p>$I = [2, +\infty[, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $I =]1, +\infty[, f(x) = x^2 (x^3 - 1)^{\frac{2}{3}}$</p> <p>$I =]-\infty, +\infty[, f(x) = \cos x \sin^4 x$ $I =]0, +\infty[, f(x) = x^2 + x^3 \sqrt{x^2 + 1}$</p>

تمرين 08

<p>لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x\sqrt{x-1}$.</p> <p>(1) - بين أن $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1}$.</p> <p>(2) - حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال $[1, +\infty[$.</p> <p>(3) - استنتج الدالة الأصلية F للدالة f التي تحقق $F(1) = 2$.</p>
--