الأستاذ محمد الرقبة

الـــــدوال الأسيـــــة

Fonctions exponentielles

I- الدالـة الأسيــة النبـريـــة :

تمهيـد :

نعلم أن دالة اللوغاريتم النبري $\ln$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

و : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

إذن الدالة $\ln$ تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

إذن : تقبل دالة عكسيـة معرفة من $\mathbb{R}$ نحـو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريـف :

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبري هي الدالة الأسيـة النبريـة والتي نرمز لها بـ $\exp$.

استنتـاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp y$$

ملاحظـة :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \exp(x) = e^x$$

خاصيـات :

-1
$$\exp(1) = e^1 = e$$
$$\exp(0) = e^0 = 1$$

-2
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad e^x \succ 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \ln e^x = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad e^{\ln x} = x$

-3 الدالة $\exp$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad e^x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
- $e^x \succ e^y \quad \Leftrightarrow \quad x \succ y$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

-4
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

5- نهايــات مهمـــة :

a- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

برهــان :

نضع : $X = e^x$

إذن : $\ln X = x$ $\qquad (x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\ln X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

b- $$\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$$

برهــان :

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$

نضع : $X = -x$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = \lim_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^X}$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{-1}{\frac{e^X}{X}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

c- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

برهــان :

نضع : $e^x = X$

إذن : $(x \to 0) \Leftrightarrow (X \to 1)$

ومنه : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{X \to 1} \frac{X - 1}{\ln X}$

$$= \lim_{X \to 1} \frac{1}{\frac{\ln X}{X - 1}} = 1$$

تطبيـــق :

أحســـب :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{2 \times \frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^{x/2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

نضع : $X = \frac{x}{2}$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^X}{X}\right)^2$$

$$= +\infty$$

أحســـب :

$$x \geq 2 \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/n}}{n\,\frac{x}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

نضع : $X = \frac{x}{n}$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^X}{X}\right)^n$$

$$= +\infty$$

أحســـب :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} \cdot \frac{x^2 - x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} \cdot (x-1)$$

$$= 1 \cdot (0-1) = -1$$

لأن : $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} = \lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

) وضعنا : $X = x^2 - x$ (

6- مشتقـة الدالـة الأسيـة النبـريـة :

لدينا : $Log\ e^x = x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

إذن : $\left(Log\ e^x\right)' = 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

أي : $Log'\left(e^x\right) \times \left(e^x\right)' = 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\left(e^x\right)'}{e^x} = 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن : $\left(e^x\right)' = e^x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

تعميـم :

لتكن f دالة عددية معرفـة بـ : $f(x) = e^{u(x)}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

فإن : f قابلة للاشتقاق على المجال I.

$$\forall x \in I \quad ; \quad f(x)' = \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

تطبيـق :

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التاليـة :

-1 $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x + 1}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - \left(e^x - 1\right)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x\,e^x + 1}{(x+1)^2}$$

-2 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{x}}\right)'$$

$$= \left(\sqrt{x}\right)' \times e^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

-3 $f(x) = x\,e^{\left(x^2-1\right)}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\left(x^2-1\right)} + x\,(2x)\,e^{\left(x^2-1\right)}$$

$$= \left(1 + 2x^2\right) e^{\left(x^2-1\right)}$$

تماريـن تطبيـقيـة :

أحسـب النهـايــات :

-1
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{-x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^{2x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

نضع : $X = 2x$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{X}{e^{X}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

-2
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}$$

نضع : $X = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{X\to 0} \frac{e^{X}-1}{X} = 1$$

-3
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+1}{e^{x}+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+3e^{-x}} = 1$$

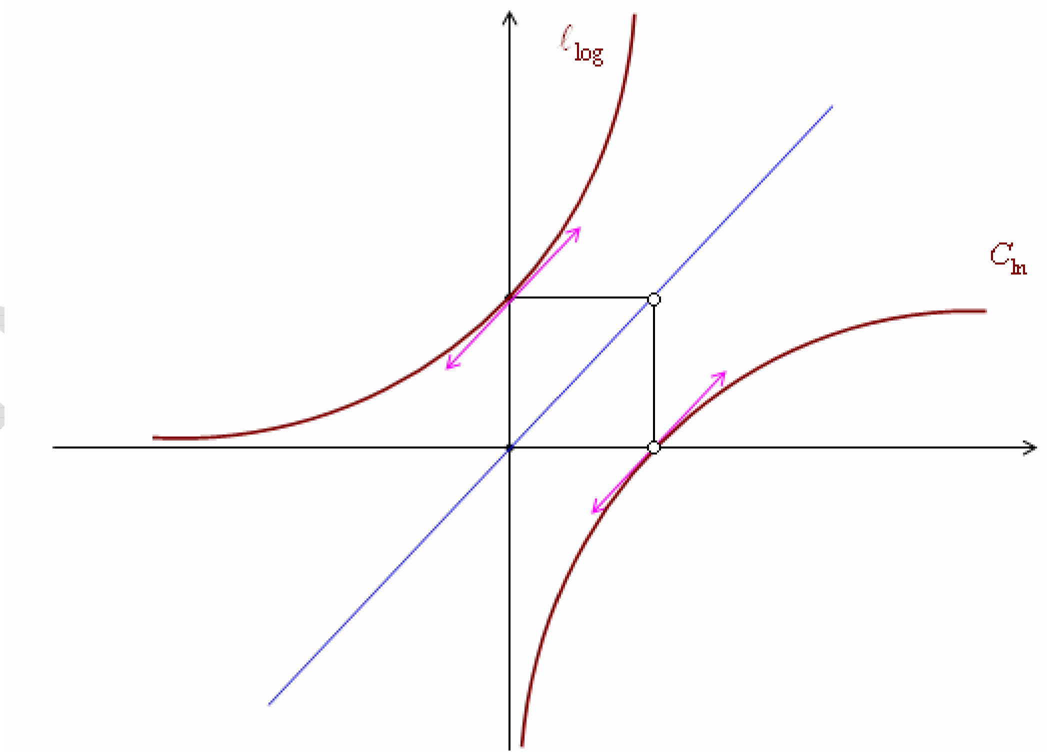
-7 التقعــر :

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad \left(e^{x}\right)' = e^{x}$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad \left(e^{x}\right)'' = \left(e^{x}\right)' = e^{x}$

وبما أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad e^{x} \succ 0$

فإن : ℓ المنحنى الممثل للدالة الأسيـة النبريـة (محدب).



تطبيــق 4 :

$$f(x) = (x-1)\cdot e^{x}$$

- مجموعة التعريف :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\,,\,+\infty[$$

- النهايـــات :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\cdot e^{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)\cdot e^{x} = -1\cdot 0 \qquad (F.I)$

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^{x} = 0$$

- التغيـــرات :

لدينا : لكل x من $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (x-1)\cdot e^{x}$$

إذن :

$$f'(x) = 1\cdot e^{x} + (x-1)\,e^{x}$$
$$= x\,e^{x}$$

- جـدول التغيـــرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- الفـروع اللانهائيـــة :

لدينا :

$$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

نحسب :

$$\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}\frac{x-1}{x}\cdot e^{x}$$
$$= 1\times(+\infty) = +\infty$$

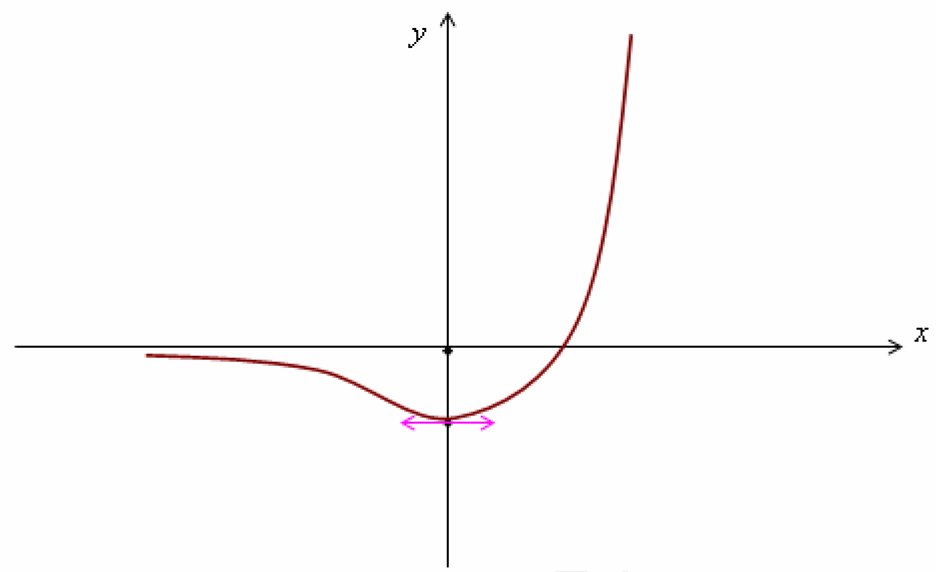
إذن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

- التقعـر ونقـط الانـعطـاف :

لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ; \qquad f'(x) = x\,e^{x}$$
$$f''(x) = 1\,e^{x} + x\,e^{x}$$
$$= (1+x)\cdot e^{x}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
التقعر		$\frac{-2}{e}$	



تطبيــق 5 :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

- **مجموعة التعريف :**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ e^x \neq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$$

- **النهـايـــات :**

- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{e^x}} = 1$
- $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = \dfrac{0}{0 - 1} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

- **التغيــرات :**

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* \ ; \quad f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

$$f'(x) = \frac{e^x (e^x - 1)' - e^x (e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} \prec 0$$

- **جـدول التغيــــرات :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1