

<u>الثانية علوم تجريبية</u> Prof : BENELKHATIR	<u>الدوال الأسية</u> Fonctions exponentielles	<u>ثانوية الفتح</u> <u>نيابة الخميسات</u>
--	---	--

<p style="text-align: center;">-- الترميز e^x :</p> <p>نعلم أن $\exp r = e^r$ لكل r من \mathbb{Q} ، نمدد هذه الكتابة إلى المجموعة \mathbb{R} ، فنضع : $\forall x \in \mathbb{R} : \exp x = e^x$: العلاقات السابقة تصبح إذن على الشكل التالي :</p> $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[: y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \\ e^x < e^y \Leftrightarrow x < y \end{cases}$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x+y} = e^x \times e^y \text{ و } e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\forall (x, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q} : e^{r \cdot x} = (e^x)^r$ $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x \text{ و } \forall x \in]0, +\infty[: e^{\ln x} = x$ <p>وأخيرا ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.</p> <p style="text-align: center;">(3)- مشتقة الدالة الأسية النبيرية:</p> <p>الدالة \ln قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ و $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.</p> <p>إذن مشتقتها لا تنعدم في كل نقطة من $]0, +\infty[$ ، وبالتالي فالدالة \exp قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و لدينا :</p> $\forall x \in \mathbb{R} : (\exp x)' = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \exp x$ <p style="text-align: center;">-- خاصية 02:</p> <p>الدالة $\exp : x \mapsto e^x$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و لدينا :</p> $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$ <p>و بصفة عامة: إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I ، فإن الدالة : $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للإشتقاق على I و لدينا : $\forall x \in I : (e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$.</p> <p style="text-align: center;">(4)- نهايات مرجعية:</p> <p style="text-align: center;">-- تمرين 01: حدد النهايات التالية ،</p> <p>(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ ، (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ ، (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ، (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ و (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$ حيث $n \in \mathbb{N}$</p>	<p style="text-align: center;">I- الدالة الأسية النبيرية:</p> <p style="text-align: center;">(1)- تعريف و نتائج:</p> <p>دالة اللوغاريتم النبيري \ln تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو \mathbb{R} ، إذن فهي تقبل تقابلا عكسيا من \mathbb{R} نحو $]0, +\infty[$.</p> <p style="text-align: center;">-- تعريف: الدالة الأسية النبيرية هي التقابل العكسي لدالة اللوغاريتم النبيري \ln ، و يرمز لها بالرمز \exp .</p> $\exp : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto y / \ln y = x \end{cases} \text{ إذن :}$ <p style="text-align: center;">- نتائج:</p> $\begin{cases} \ln 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1 \\ \ln e = 1 \Leftrightarrow \exp 1 = e \end{cases} \text{ -- لدينا :}$ <p>و $\forall r \in \mathbb{Q} : \ln(e^r) = r \Leftrightarrow \exp r = e^r$.</p> <p style="text-align: center;">و بصفة عامة:</p> $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(\exp x) = x$ <p>و $\forall x \in]0, +\infty[: \exp(\ln x) = x$.</p> <p>إذن :</p> $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \exp x = \exp y \Leftrightarrow x = y \\ \exp x < \exp y \Leftrightarrow x < y \end{cases}$ <p style="text-align: center;">-- الدالة \exp متصلة و لها نفس منحنى تغيرات الدالة \ln</p> <p>إذن ، فهي تزايدية قطعاً على \mathbb{R} ، و لدينا :</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$ <p style="text-align: center;">-- في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) منحنى الدالة \exp هو مماثل منحنى الدالة \ln بالنسبة للمنصف الأول .</p> <p style="text-align: center;">(2)- خاصيات:</p> $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \exp(x + y) = \exp x \times \exp y \\ \exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y} \\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \end{cases}$ <p>و $\forall (x, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q} : \exp(r \cdot x) = (\exp x)^r$.</p>
---	---

<u>الثانية علوم تجريبية</u> Prof : BENELKHATIR	<u>الدوال الأسية</u> Fonctions exponentielles	<u>ثانوية الفتح</u> <u>نيابة الخميسات</u>
--	---	--

<p>III- الدالة الأسية للأساس a ، $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:</p> <p>الدالة \log_a تقابل من $]0, +\infty[$ نحو \mathbb{R} لأنها متصلة ورتبية قطعاً على $]0, +\infty[$ و $\log_a (]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.</p> <p>(1)- تعريف:</p> <p>التقابل العكسي للتقابل \log_a يسمى الدالة الأسية للأساس a ويرمز له بالرمز \exp_a ، إذن :</p> $\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto y / \log_a y = x \end{cases}$ <p style="text-align: center;">■ ملحوظة:</p> <p>$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[:$</p> <p>$\exp_a x = y \Leftrightarrow \log_a y = x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a$</p> <p>إذن : $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a x = e^{x \ln a}$.</p> <p>$\forall r \in \mathbb{Q} : \log_a (a^r) = r$</p> <p>إذن : $\forall r \in \mathbb{Q} : \exp_a r = a^r$</p> <p>نمدد هذه الكتابة إلى المجموعة \mathbb{R} فيصبح لدينا ،</p> $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a x = a^x$ <p>(2)- خاصيات:</p> <p>$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ و $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2} / a \neq 1$ و $b \neq 1 :$</p> $\begin{cases} (a^x)^y = a^{x \cdot y} \\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} a^{x+y} = a^x \times a^y \\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \end{cases}$ <p>$\cdot \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ و $(ab)^x = a^x b^x$</p> <p>(3)- دراسة الدالة: $\exp_a : x \mapsto a^x$ ، $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ،</p> <p>-- النهايات: هناك حالتين ،</p> $0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \end{cases}$ <p>و</p> $a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \end{cases}$	<p>-- تمرين 02: حدد النهايات التالية :</p> <p>(1) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x e^x$ و (2) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 1}$</p> <p>(3) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x + e^{-x}}$ و (4) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^x}{x e^x}$</p> <p>(5) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)$ و (6) : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x + x^2}$</p> <p>(7) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) e^{x-x^2}$ و (8) : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2} - e^4}{x^2 - 4}$</p> <p>(9) : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 e^{-x} + x^3$ و (10) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$</p> <p>(11) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - (2x^2 + x)$</p> <p>(12) : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{px} - e^{qx}}{x} / (p, q) \in \mathbb{R}^2 ; p \neq q$</p> <p>II- تطبيقات:</p> <p>-- تمرين 03: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :</p> $f(x) = 2x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ <p>(1)- حدد D_f ، ثم أحسب النهايتين :</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$</p> <p>(2)- أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$</p> <p>ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما .</p> <p>(3)- بين أن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ مقاربين مانلين (Δ_1) و (Δ_2) على التوالي و اعط معادلتها .</p> <p>(4)- بين أن f قابلة للإشتقاق على D_f و إن :</p> $\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{2e^{-2x} - 5e^{-x} + 2}{(1 - e^{-x})^2}$ <p>(5)- حل في D_f المتراجحة : $2e^{-2x} - 5e^{-x} + 2 \geq 0$</p> <p>(6)- أنشئ جدول تغيرات الدالة f على D_f .</p> <p>(7)- أرسم المقاربين (Δ_1) و (Δ_2) و المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .</p>
---	--

<u>الثانية علوم تجريبية</u> Prof : BENELKHATIR	<u>الدوال الأسية</u> Fonctions exponentielles	<u>ثانوية الفتح</u> <u>نيابة الخميسات</u>
--	---	--

<p style="text-align: center;">■ تمرين 04:</p> <p>-- لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :</p> $f(x) = \begin{cases} 2x \left \ln\left(\frac{e}{x}\right) \right ; x > 0 \\ e^x - 1 - 2\sqrt{1-e^x}; x \leq 0 \end{cases}$ <p>و ليكن (C_f) منحنى الدالة f في $M(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث</p> $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2cm$ <p>(1)- أحسب النهايات التالية :</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ <p>ثم حدد طبيعة الفروع اللانهائية ل (C_f) .</p> <p>(2)- أ- أدرس إتصال و قابلية اشتقاق f عند $x_0 = 0$ ، و اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها . ب- أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0 = e$ ، و اعط تأويلا هندسيا للنتجتين المحصل عليهما .</p> <p>(3)- أ- بين أن :</p> $\begin{cases} \forall x \in]0, e[: f'(x) = -2 \ln x \\ \forall x \in]e, +\infty[: f'(x) = 2 \ln x \end{cases}$ <p>و $\forall x \in]-\infty, 0[: f'(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right) e^x$</p> <p>ب- أدرس إشارة المشتقة f' ثم أنشيء جدول تغيرات f .</p> <p>(4)- أرسم المنحنى (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .</p> <p>(5)- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty, 0]$. أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده . ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .</p> <p style="text-align: center;">■ تمرين 05:</p> <p>(1)- مثل مبيان الدالة : $f : x \mapsto x + \ln(1+x^2)$ ، (أدرس التحذب و التفرع و حدد نقط الإنعطاف) .</p> <p>(2)- نعتبر الدالة : $g : x \mapsto (1+x^2)e^x$ ، حدد علاقة بين $f(x)$ و $g(x)$ ، ثم إستنتج تغيرات الدالة g .</p>	<p style="text-align: center;">-- المشتقة:</p> <p>الدالة : $\exp_a : x \mapsto a^x$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} :$ $(a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = (\ln a) e^{x \cdot \ln a} = (\ln a) a^x$ و بالتالي ، إذا كان $0 < a < 1$ فإن الدالة \exp_a تناقصية قطعاً على \mathbb{R} . و إذا كان $a > 1$ فإن الدالة \exp_a تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .</p> <p style="text-align: center;">-- التمثيل المبياني:</p> <p>(4)- تطبيقات:</p> <p>-- تمرين 01: حل في المجموعة \mathbb{R} المعادلتين :</p> <p>(1): $e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$ (2): $3^{x+2} + 9^{x-1} - 1458 = 0$ و</p> <p>-- تمرين 02:</p> <p>لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :</p> $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ <p>(أ)- حدد النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم أول النتيجتين المحصل عليهما . (ب)- حدد f' ، ثم أدرس إشارتها و استنتج جدول تغيرات الدالة f .</p> <p>-- تمرين 03: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :</p> $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 5}{e^x - 2}\right)$ <p>(1)- حدد D_f ، ثم أحسب نهايتي f عند محديه . (2)- أ- بين أن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مانلا (Δ) و حدد معادلته . ب- حدد وضع (C_f) بالنسبة لمقاربه (Δ) . (3)- حدد f' ، ثم أدرس إشارتها و استنتج جدول تغيرات الدالة f . (4)- أرسم المقارب (Δ) و المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .</p>
---	---