ثانوية علال بن عبد الله نيابة بني ملال

# http://www.meljohra.ift.c
# x

## Calcul integral

**EL JOHRA MOHAMED**

09

meljohra@gmail.com

meljohra@gmail.com

meljohra@gmail.com

# حساب التكامل

## الحصة رقم 1

### I. تكامل دالة متصلة

#### 1. تعريف و خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية لها على المجال I

لكل عددين حقيقيين a و b من المجال I ، العدد F(b) - F(a) غير مرتبط بالدالة F

العدد F(b) - F(a) يسمى تكامل الدالة f من a إلى b و نرمز له بالرمز : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

a و b يسميا محدا التكامل

#### 2. أمثلة تطبيقية ص 195

$$\int_a^b dx = \int_a^b 1\, dx = [x]_a^b = b - a$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$$

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^{e-1} = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 = \frac{(e^2 - 1)}{2}$$

$$\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{x+2}\, dx = \left[\frac{3}{4}(x+2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-2}^{6} = \frac{3}{4} \times 8^{\frac{4}{3}} = 12$$

#### 3. ملاحظات

بما أن العدد F(b) - F(a) غير مرتبط بالمتغير x فإنه يمكن تغيير الحرف x بأي حرف آخر حسب الظاهرة المدروسة

نكتب : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$





meljohra@gmail.com

# الحصة رقم 2

## II. خاصيات

### 1. خاصية 1

لتكن f دالة متصلة على مجال I. a و b و c أعداد حقيقية من المجال I لدينا :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

### 2. تطبيق ص 197

أحسب التكاملين :

- $I = \int_{-1}^{1} |x| dx$
- $J = \int_{-1}^{1} |x^2 - x| dx$

### 3. الحل

$$I = \int_{-1}^{1} |x| dx = \int_{-1}^{0} |x| dx + \int_{0}^{1} |x| dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -x dx + \int_{0}^{1} x dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

لندرس إشارة $x^2-x$



meljohra@gmail.com

| X | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $x^2 - x$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

و منه :

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{1} \left| x^2 - x \right| dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left| x^2 - x \right| dx + \int_{0}^{1} \left| x^2 - x \right| dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left( x^2 - x \right) dx + \int_{0}^{1} \left( -x^2 + x \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{0} + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{0}^{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

### 4. خاصية 2 : الخطانية

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

لكل عنصرين a و b من المجال I لدينا :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (kf)(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

### 5. أمثلة

$$\int_0^1 (x^2+7x-3)dx = \int_0^1 x^2\,dx + 7\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 3\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + 7\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - [3x]_0^1 = \frac{5}{6}$$

$$\int_1^4 (3x+\sqrt{x})\,dx = 3\int_1^4 x\,dx + \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = 3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{163}{6}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x}+2e^{3x}\right)dx = 3\int_1^2 \frac{1}{x}dx + 2\int_1^2 e^{3x}\,dx = 3[\ln x]_1^2 + 2\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_1^2 = 3\ln 2 + \frac{2}{3}e^6 - \frac{2}{3}e^3$$



meljohra@gmail.com

# الحصة رقم 3

### 6. تمرين تطبيقي

نعتبر التكاملين I و J المعرفين بما يلي : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2(x)\, dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2(x)\, dx$

أحسب I+J و I-J

استنتج قيمتي التكاملين I و J

### 7. الحل

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos^2(x) + sin^2(x))\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} I + J = \pi/4 \\ I - J = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \\ 2J = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{(\pi+2)}{4} \\ J = \frac{(\pi-2)}{4} \end{cases}$$

### 8. خاصية 3

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عدد حقيقي من المجال I .

الدالة الأصلية للدالة f على المجال I و التي تنعدم في a هي الدالة h المعرفة على I بما يلي : $(\forall x \in I)\,;\mathrm{h(x)} = \int_a^x \mathrm{f(t)dt}$

### 9. برهان

الدالة h متصلة على المجال I لأنها قابلة للإشتقاق على المجال I و لدينا :

$$\begin{aligned} (\forall x \in I); h(x) &= \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \\ &\Rightarrow h'(x) = F'(x) - (F(a))' \\ &\Rightarrow h'(x) = f(x) - 0 \\ &\Rightarrow h'(x) = f(x) \end{aligned}$$

ومنه h دالة أصلية للدالة f

وحيث $h(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ فإن h هي الدالة الأصلية للدالة f على المجال I و التي تنعدم في a

### 10. مثال

نعلم أن الدالة ln هي الدالة الأصلية للدالة $x \to 1/x$ على المجال $]0, +\infty[$ و التي تنعدم في 1 :

و منه : $(\forall x > 0)\ ;\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

# الحصة رقم 4

## III. تقنيات حساب التكامل

### 1. استعمال جدول الدوال الأصلية

**a. قاعدة 1**

$r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ مع $\int_a^b u'(t)u(t)^r = \left[\frac{1}{r+1}u(t)^{r+1}\right]_a^b$

**b. تطبيق 1**

أحسب التكامل : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

**c. قاعدة 2**

$$\int_a^b \frac{u'(t)}{u(t)}dt = [\ln|u(t)|]_a^b$$

**d. تطبيق 2**

أحسب التكامل : $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

**e. قاعدة 3**

$$\int_a^b u'(t)e^{u(t)}\, dt = \left[e^{u(t)}\right]_a^b$$

**f. تطبيق3**

# الحصة رقم 5

## 2. المكاملة بالأجزاء

### a. تمهيد

لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال [a ;b] و بحيث u′ و v′ متصلتين على [a ;b]

نعلم أن : $(\forall x \in [a;b]) : (uv)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

ومنه : $(\forall x \in [a;b]) : u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)$

و بالتالي : $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

أي $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

### b. الخاصية

لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال [a ;b] و بحيث u′ و v′ متصلتين على [a ;b]

لدينا : $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

### c. مثال

لنحسب التكامل : $\int_0^1 x\,e^x\,dx$

## 3. تمرين تطبيقي :

أحسب باستعمال المكاملة بالأجزاء :

$$I = \int_1^2 lnx\,dx$$

$$J = \int_0^\pi cosx.e^{-x}\,dx$$

## 4. الحل

لنحسب التكامل $I = \int_1^2 lnx\,dx$

**لنضع :** $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ و منه $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

**و بالتالي :** $I = \int_1^2 lnx\,dx = [xlnx]_1^2 - \int_1^2 dx = [xlnx]_1^2 - [x]_1^2 = 2ln2 - 1$

لنحسب التكامل : $J = \int_0^\pi cosx.e^{-x}\,dx$

لنضع : $\begin{cases} u'(x) = cosx \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ و منه $\begin{cases} u(x) = sinx \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

و بالتالي:

$$J = \int_0^\pi cosx.e^{-x}\,dx = [e^{-x}sinx]_0^\pi - \int_0^\pi - sinx\,e^{-x}dx = \int_0^\pi sinx\,e^{-x}dx$$



meljohra@gmail.com

و باستعمال مكاملة بالأجزاء مرة ثانية نحسب التكامل $L = \int_0^{\pi} sinx.e^{-x}\,dx$

نضع $\begin{cases} u'(x) = sinx \\ \mathrm{v(x) = e^{-x}} \end{cases}$ و منه $\begin{cases} u(x) = -cosx \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

و بالتالي : $L = \int_0^{\pi} sinx.e^{-x}\,dx = [-cos\,x\,.e^{-x}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} cosx.e^{-x}\,dx = 1 + e^{-\pi} - \mathrm{J}$

و منه $J = 1 + e^{-\pi} - J$

و بالتالي : $2\,J = 1 + e^{-\pi}$

أي $J = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$

# الحصة رقم 6

## IV. التكامل و الترتيب

### 1. خاصية 1

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I بحيث $a \leq b$

إذا كان لكل x من [a ;b] $f(x) \geq 0$ فإن $\int^{b} f(x)dx \geq 0$

إذا كان لكل x من [a ;b] $f(x) \leq 0$ فإن $\int^{b} f(x)dx \leq 0$

### 2. خاصية 2

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و a و b عنصرين من I بحيث $a \leq b$

إذا كان لكل x من [a ;b] $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx$

### 3. خاصية 3

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I بحيث $a \leq b$

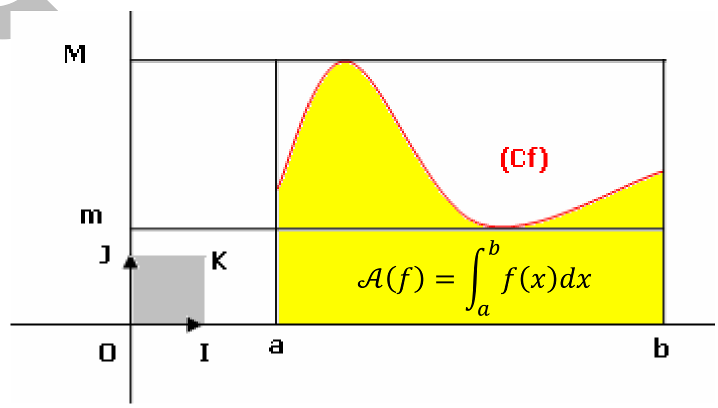
لدينا : $\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq \int_{a}^{b}|f(x)|dx$

### 4. خاصية 4

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I بحيث $a \leq b$

إذا كانت m القيمة الدنوية و M القيمة القصوية للدالة f على المجال [a ;b] فإن :

$$m(b-a) \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq M(b-a)$$




### 5. تعليق

إذا كانت f دالة موجبة على مجال [a ;b] فإن المساحة $\mathcal{A}(f) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ محصورة بين مساحة المستطيل الذي بعديه M و (b-a) و المستطيل الذي بعديه m و (b-a)

### 6. خاصية و تعريف

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I بحيث $a < b$



meljohra@gmail.com

العدد الحقيقي : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال [a ;b]

يوجد على الأقل عنصر c من المجال [a ;b] بحيث : $f(c) = \mu$

## 7. تمرين تطبيقي 1 ص 201

نعتبر التكامل : $I = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dx$

بين أن لكل x من المجال [0,2] لدينا : $x \leq \sqrt{1+x^2} \leq x+1$

استنتج تأطيرا للتكامل I .

## 8. الحل

لكل x من من المجال [0,2] لدينا :

$$x^2 \leq x^2+1 \leq x^2+2x+1$$

و بما الدالة $x \to \sqrt{x}$ تزايدية قطعا على المجال $[0 ; +\infty[$ فإن : $x \leq \sqrt{x^2+1} \leq x+1$

نستنتج أن : $\int_0^2 x\, dx \leq \int_0^2 \sqrt{x^2+1}\, dx \leq \int_0^2 (x+1)dx$

أي : $\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \leq I \leq \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2$

أي : $2 \leq I \leq 4$

# الحصة رقم 7

## V. حساب المساحات

### 1. التأويل الهندسي لتكامل دالة متصلة و موجبة

#### a. الخاصية

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

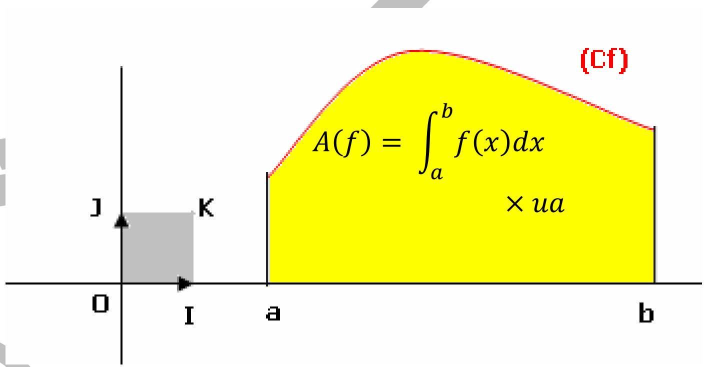
إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على قطعة [a,b] ( a < b) فإن مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي x = a و x = b هي : $\int_a^b f(x)dx \times ua$

حيث ua هي وحدة قياس المساحة

#### b. وحدة قياس المساحة

بصفة عامة هي مساحة الرباعي ( مستطيل أو مربع ) المنشأ على المعلم

شكل :




### 2. تمرين تطبيقي ص 195

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ حيث $\|\vec{\imath}\| = 1{,}5$ cm و $\|\vec{\jmath}\| = 1$cm

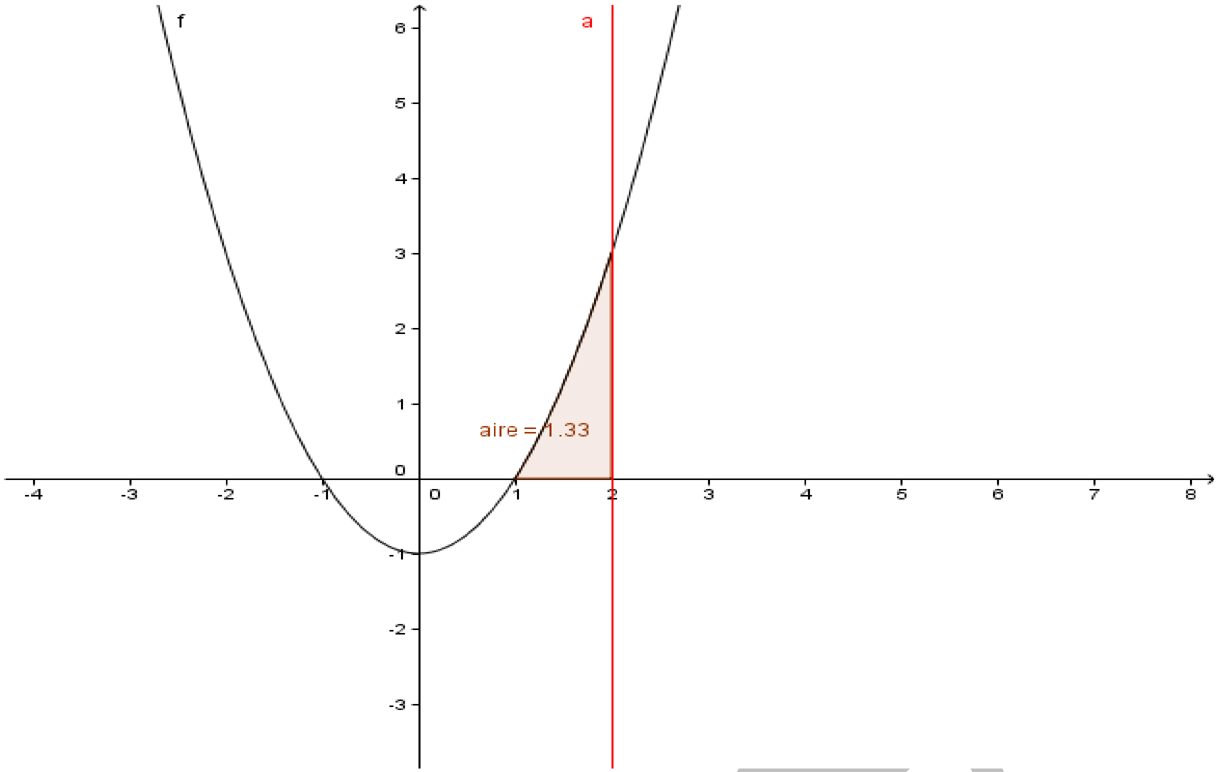
نعتبر الدالة العددية $f(x) = x^2 - 1$

أنشئ (Cf) منحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

أحسب مساحة الحيز المحصور بين (Cf) و المستقيمات التي معادلاتها هي : y = 0 و x = 1 و x=2

### 3. الحل

meljohra@gmail.com




الدالة f متصلة و موجبة على المجال [1 ; 2] إذن مساحة الحيز المطلوب هي: $\int_1^2 \mathrm{f(x)dx} \times \mathrm{ua}$

و حيث و حدة القياس هي ua = 1,5 x 1 cm² = 1,5 cm²

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (x^2-1)dx \times ua = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 \times ua = \frac{4}{3}\, ua = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2cm^2$$

### 4. حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ , لتكن f دالة متصلة على القطعة [a ;b] و (Cf) المنحنى الممثل لها .

**إذا كانت f متصلة و سالبة على القطعة [a ;b]**

نعتبر (Δ) حيز المستوى المحصور بين (Cf) و محور الأفاصيل و المستقيمين $(D_1) : x = a$ و $(D_2) : x = b$ .

ليكن (Δ’) حيز المستوى المحصور بين (C’) المنحنى الممثل للدالة (-f) و المستقيمين $(D_1)$ و $(D_2)$

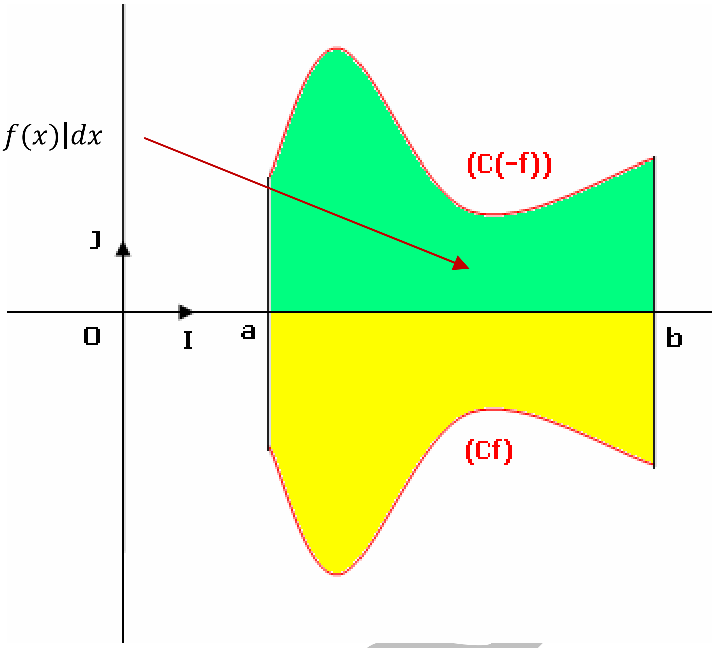
الحيزين (Δ) و (Δ’) لهما نفس المساحة الهندسية

و منه مساحة الحيز (Δ) هي : $\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b -\mathrm{f(x)dx}$ بوحدة قياس المساحة



meljohra@gmail.com

$$\mathcal{A}(f) = \int_a^b -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$




**إذا كانت f تغير إشارتها على القطعة [a ;b]**

نفترض مثلا أن $\begin{cases}(\forall x \in [a;c] : f(x) > 0)\\(\forall x \in [c;b] : f(x) < 0)\end{cases}$ أنظر الشكل

نعتبر $(\Delta)$ حيز المستوى المحصور بين (Cf) و محور الأفاصيل و المستقيمين $(D_1) : x = a$ و $(D_2) : x = b$ .

الحيز $(\Delta)$ هو إتحاد الحيزين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ المرتبطين بالمجالين [a ;c] و [c ;b] على التوالي :

إذن $(\Delta) = \mathcal{A}(\Delta_1) + \mathcal{A}(\Delta_2) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$ بوحدة قياس المساحة

### 5. خاصية

المستوى $(p)$ منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$ , و f دالة متصلة على القطعة [a ;b] و (Cf) المنحنى الممثل لها .

نعتبر $(\Delta)$ حيز المستوى المحصور بين (Cf) و محور الأفاصيل و المستقيمين $(D_1) : x = a$ و $(D_2) : x = b$ .

المساحة الهندسية للحيز $(\Delta)$ هي العدد الحقيقي الموجب $\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة



meljohra@gmail.com

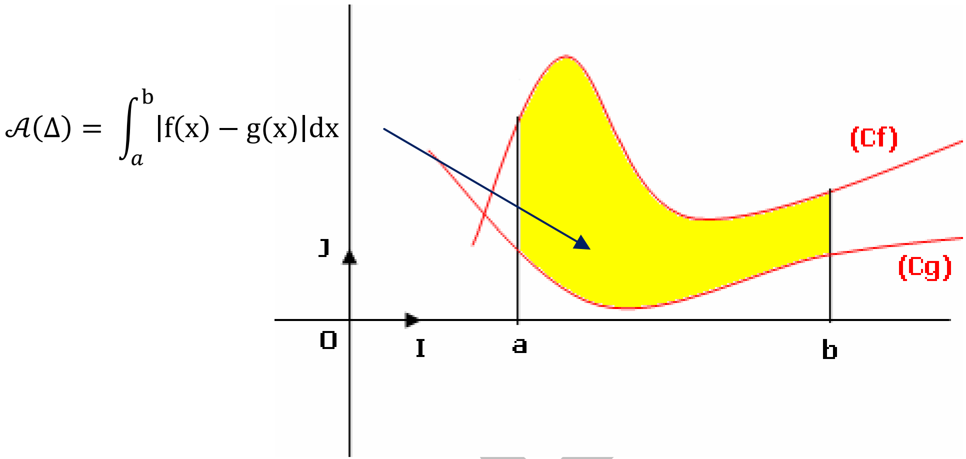
# الحصة رقم 8

### 6. مساحة حيز محصور بين منحنيي دالتين

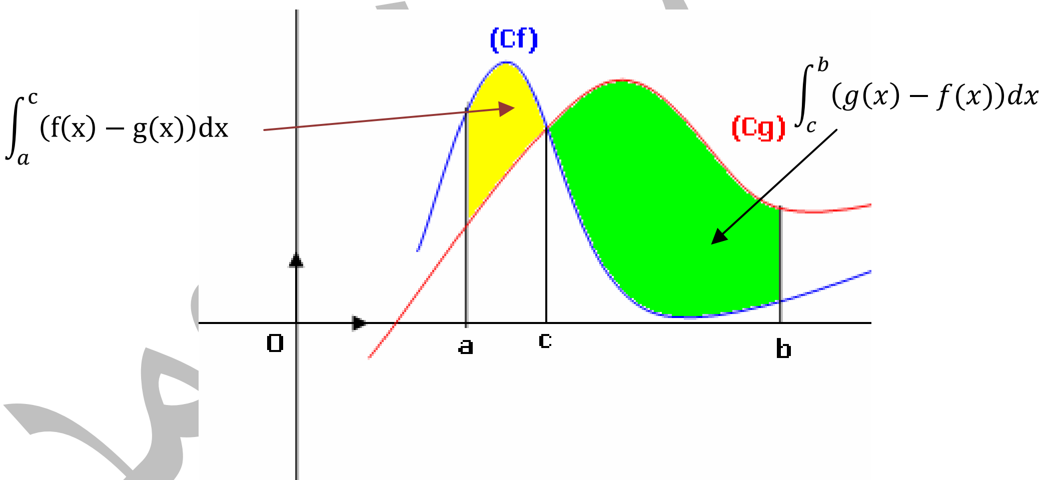
لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال [a ;b]

ليكن (Δ) حيز المستوى المحصور بين (Cf) و (Cg) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي على القطعة [a ;b]

لدينا : $\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة




### 7. ملاحظة




### 8. تطبيق 1 ص 203

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على +IR* بما يلي : $f(x) = 2lnx + \frac{1}{x} - x$

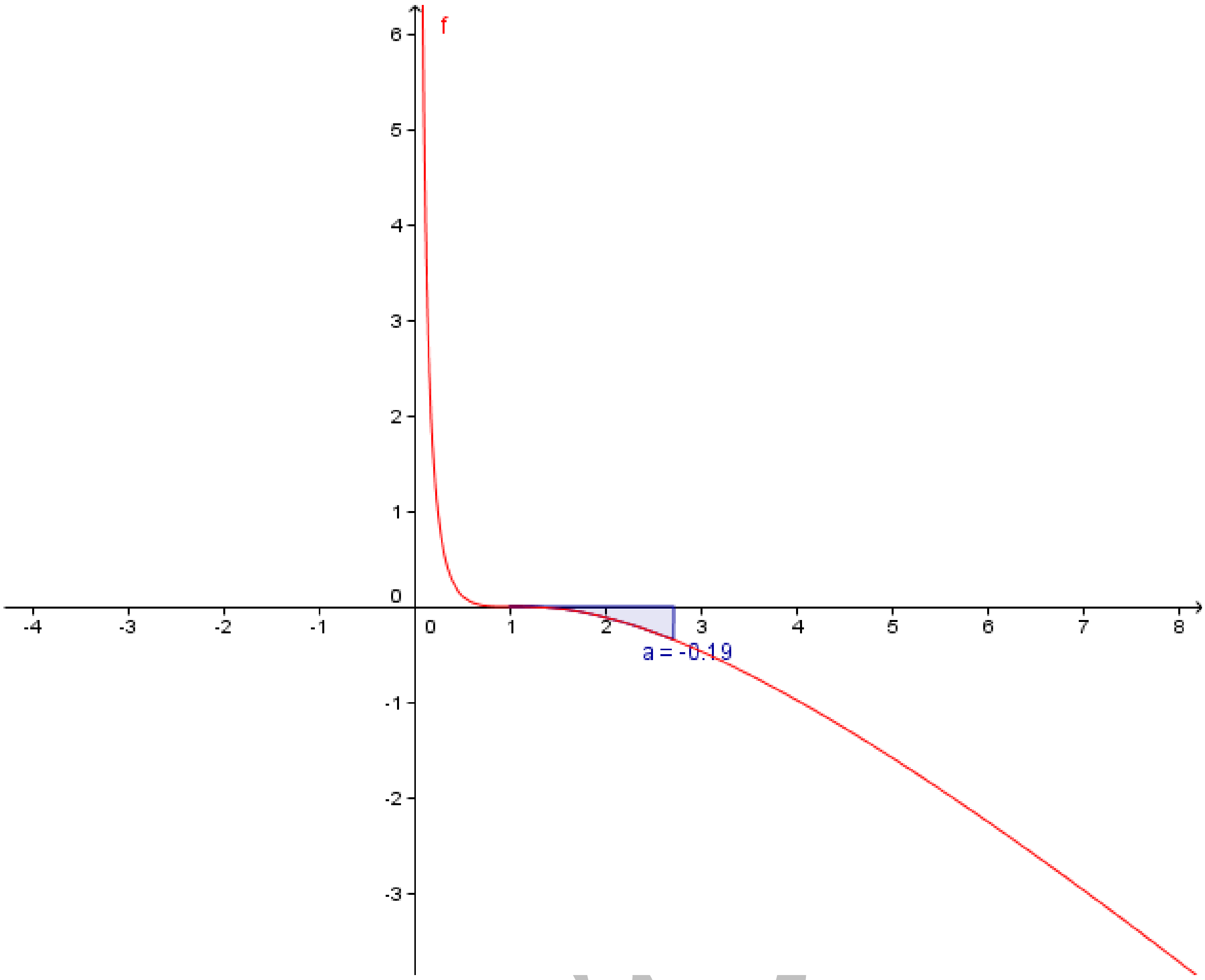
أنشئ (Cf) في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

ليكن (Δ) حيز المستوى المحصور بين (Cf) و محور الأفاصيل و المستقيمين $(D_1) : x = 1$ و $(D_2) : x = 5$ .

أحسب التكامل : $\int_1^5 \ln x \, dx$

استنتج مساحة الحيز (Δ)

### 9. الحل




**10. تطبيق 2 ص 203**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي: $f(x) = x + e^{-x}$

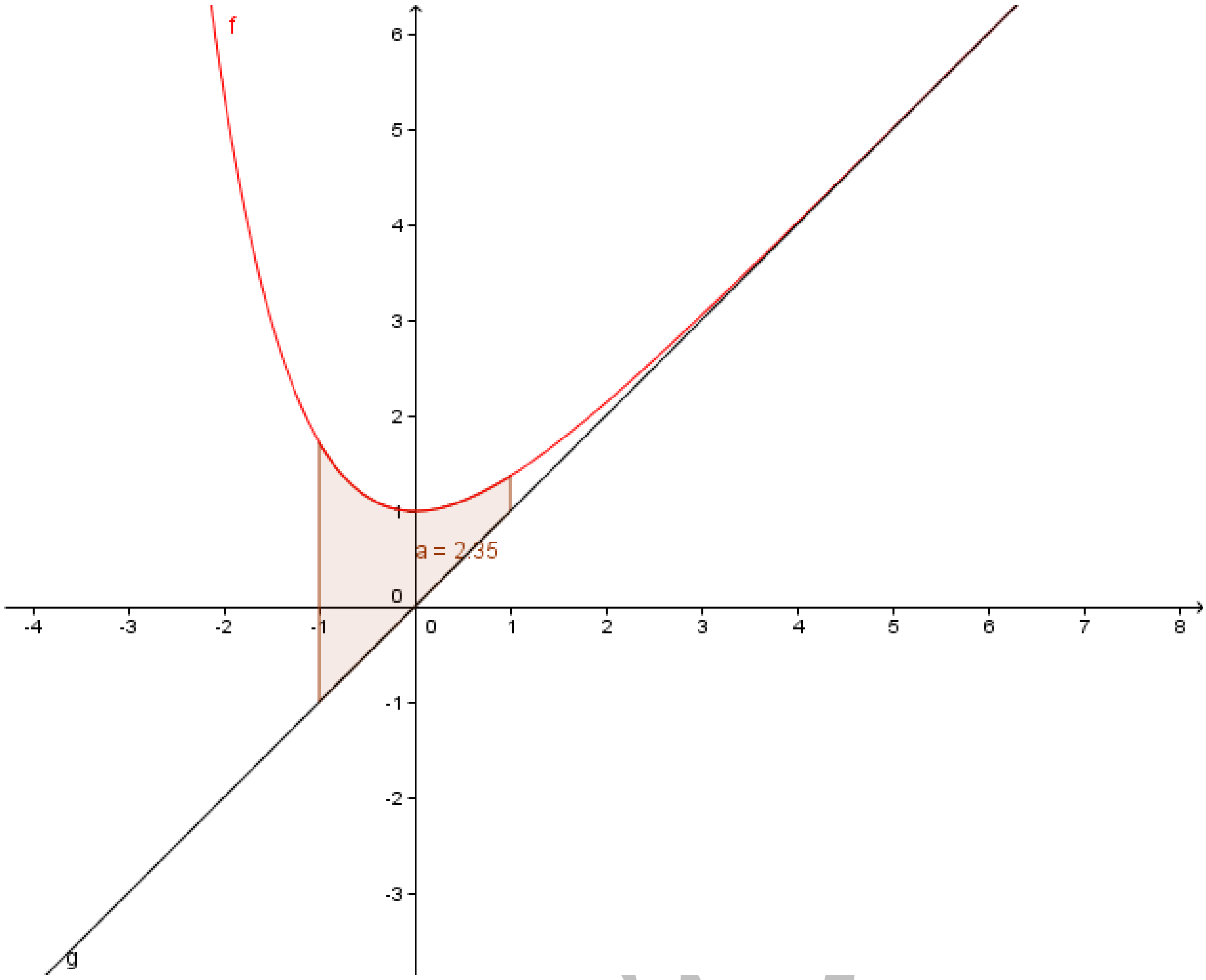
أنشئ (Cf) في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ بحيث : $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1,5\ cm$

أحسب مساحة الحيز المحصور بين (Cf) و المستقيمات التي معادلاتها هي : y = x و x = - 1 و x = 1 .

**11. الحل**



meljohra@gmail.com


f
g
a = 2.35

# الحصة رقم 9

## VI. حساب الحجوم

### 1. وحدة قياس الحجوم

الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد $(0;\ \vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$

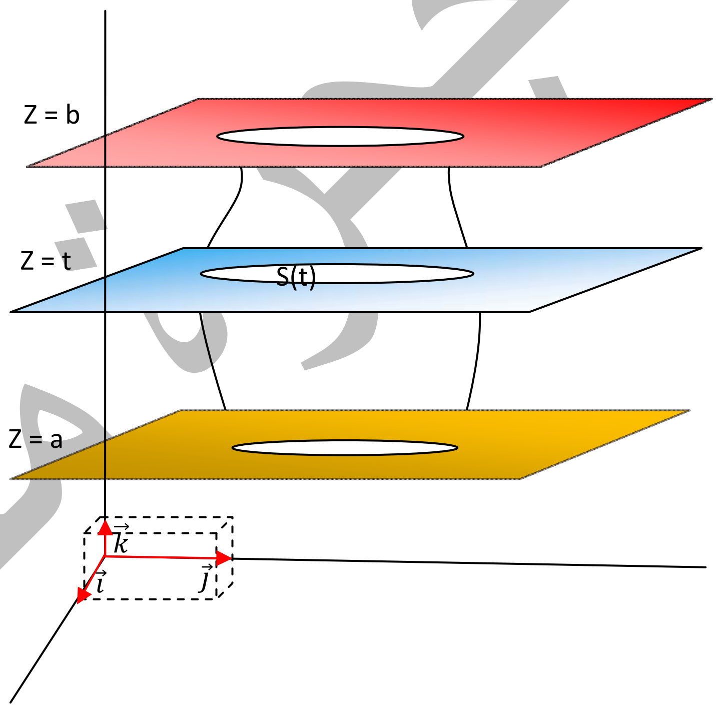
وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب المنشأ على المعلم و رمزه uv

### 2. خاصية

ليكن Σ مجسما محصورا بين مستويين معرفين على التوالي بالمعادلتين : z = a و z = b

كل مستوى معادلته z = t حيث $a \ \leq t \ \leq b$ يقطع المجسم Σ وفق قطاع مستوي مساحته S(t) بوحدة قياس المساحة.

إذا كانت الدالة S : t →s(t) متصلة على المجال [a ;b] فإن حجم المجسم Σ هو : $V \ = \ \int_a^b S(t)dt \ \times uv$




### 3. مثال: حجم فاكة ص 205

الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد $(0;\ \vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$

لتكن فلكة مركزها O و شعاعها R و V حجمها

لكل t من المجال [-R ; R] نضع S(t) مساحة الدائرة التقاطع بين المستوى Z=t و الفلكة

شعاع هذه الدائرة التقاطع هي ( علاقة فيتاغورس ) : $S(t) \ = \pi \ (R^2 - t^2)$



meljohra@gmail.com

و منه : $V = \int_{-R}^{R} S(t)dt = \int_{-R}^{R} \pi\,(R^2 - t^2)dt = \pi\,\left[R^2 t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$



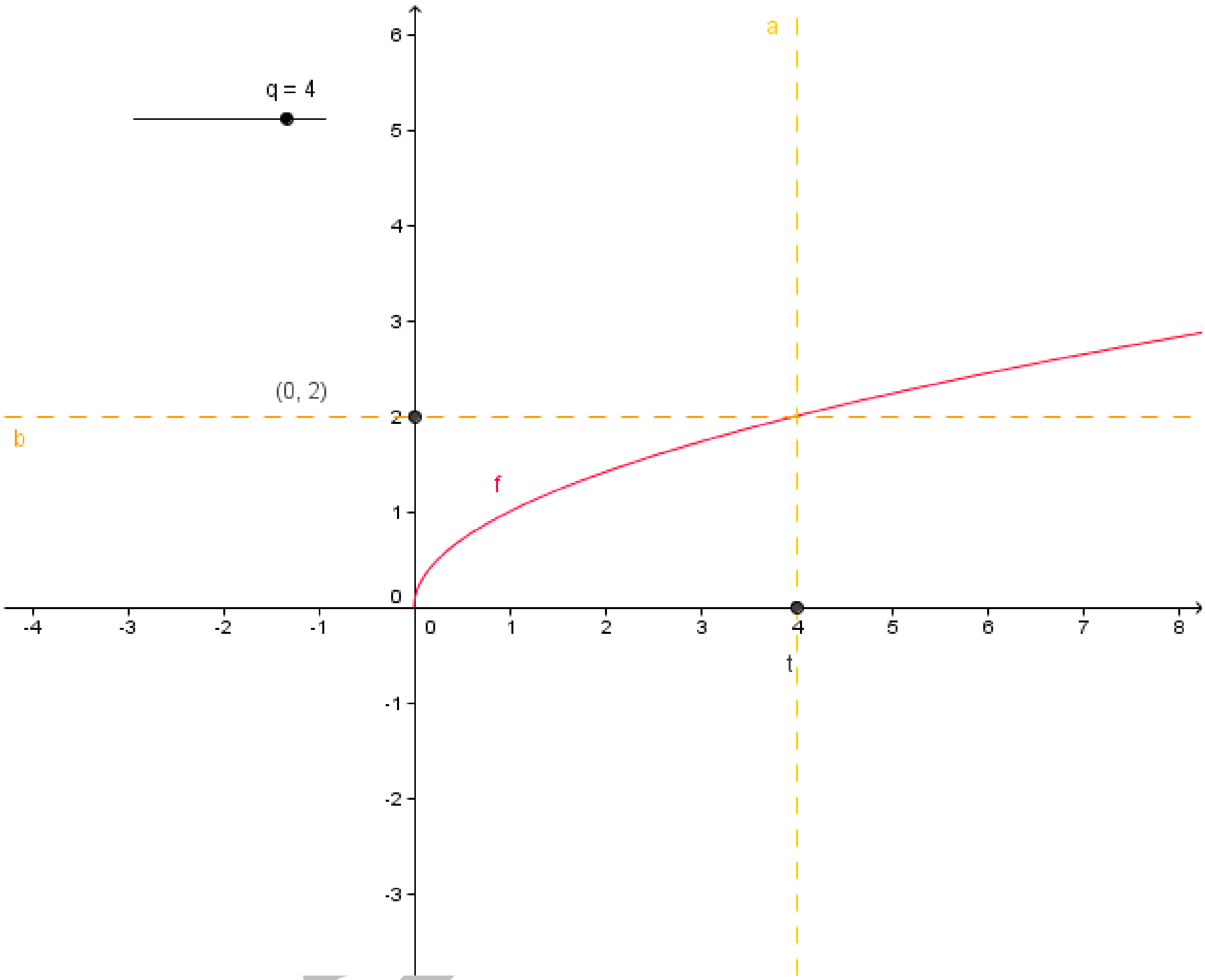


meljohra@gmail.com

# الحصة رقم 10

### 4. حجم مجسم دوراني

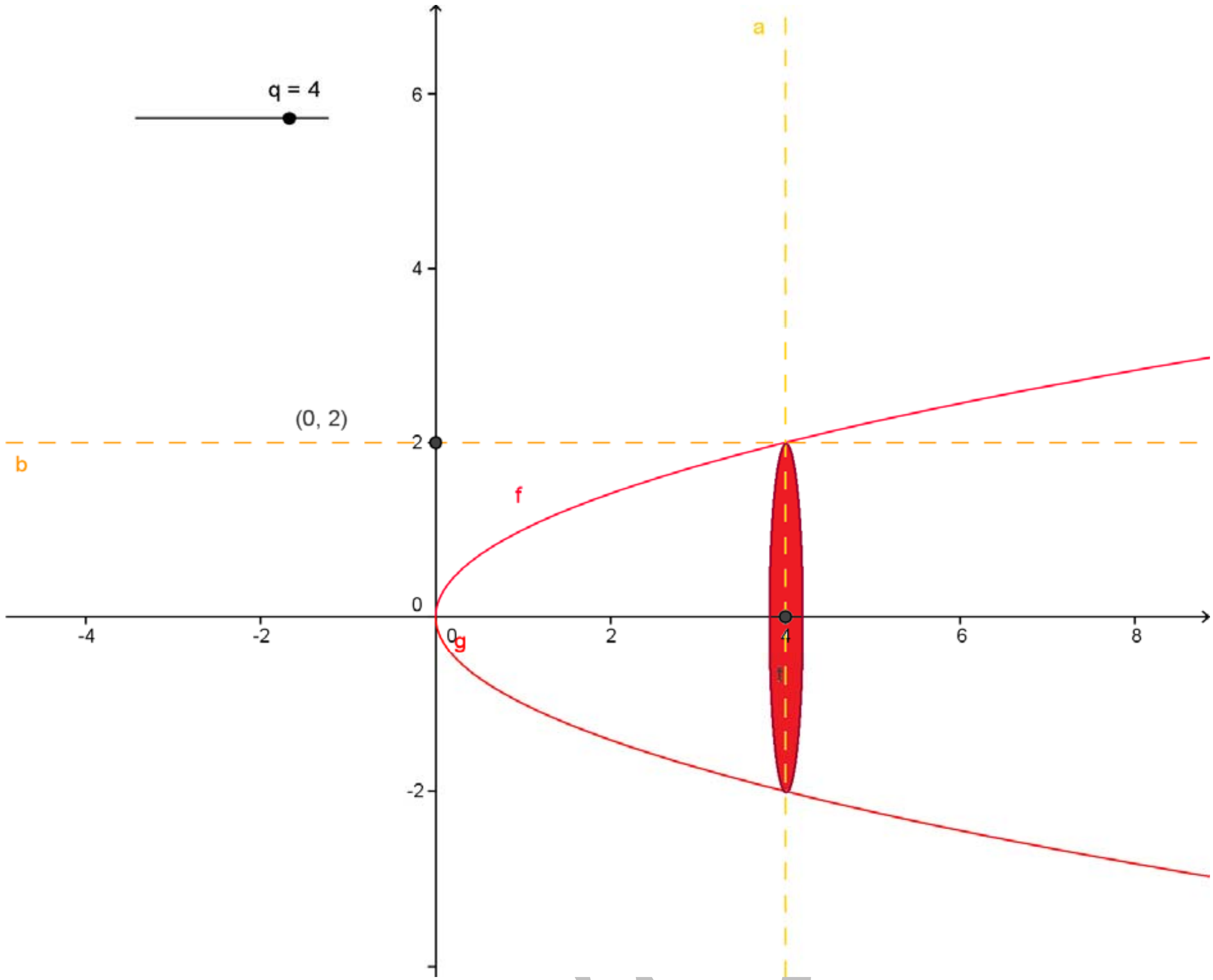
لتكن f دالة متصلة على قطعة [a ;b] و (Cf) منحناها في معلم متعامد $(0;\ \vec{i};\vec{j};\vec{k})$



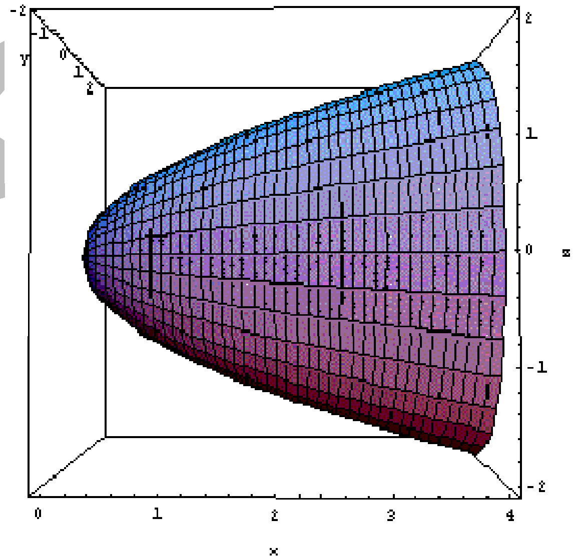

عندما يدور (Cf) دورة كاملة حول محور الأفاصيل فإنه يتولد مجسما في الفضاء يسمى مجسم دوراني أو مجسم الدوران



meljohra@gmail.com




الشكل :



المستوى ذو المعادلة x=t بحيث $a \leq t \leq b$ يقطع المجسم وفق دائرة شعاعها R= f²(t)

و منه حجم المجسم الدوراني هو : $V = \int_a^b S(t)dt = \int_a^b \pi f^2(t)dt$ بوحدة حساب الحجوم

## 5. خاصية

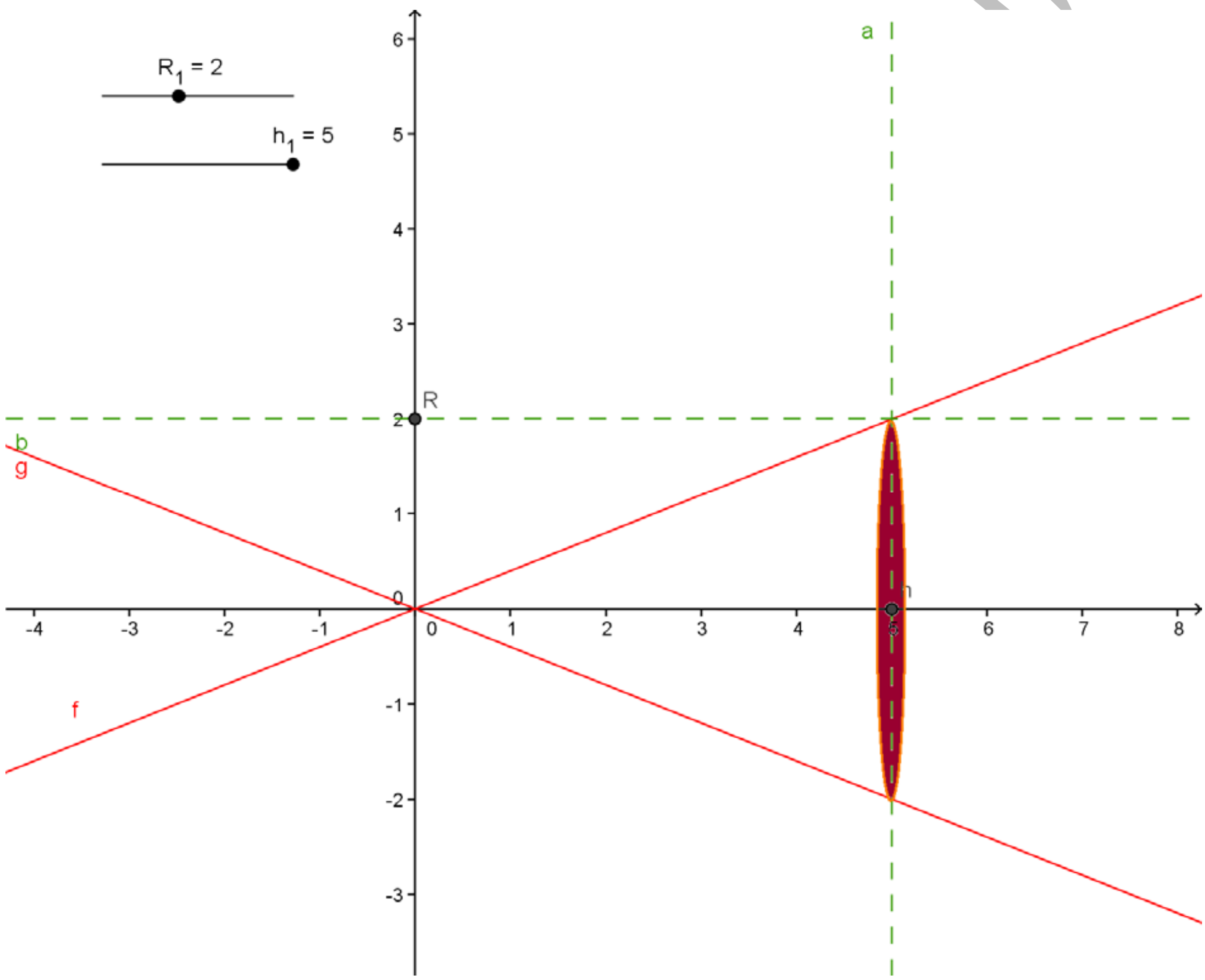
لتكن f دالة متصلة على قطعة [a ;b] و (Cf) منحناها في معلم متعامد $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

عندما يدور (Cf) دورة كاملة حول محور الأفاصيل فإنه يتولد مجسما في الفضاء يسمى مجسم دوراني أو مجسم الدوران حجمه بوحدة قياس الحجوم هو : $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

## 6. مثال

مثال حجم مخروط ارتفاعه h و شعاع قاعدته R

يمكن الحصول على هذا المخروط بدوران القطعة ذات المعادلة الديكارتية $\left(0 \leq x \leq h : y = f(x) = \frac{R}{h}x\right)$




حجم المخروط المذكور أعلاه هو : $V = \pi \int_0^h f^2(x)dx = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} x^2dx = \pi \frac{R^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

meljohra@gmail.com

meljohra@gmail.com