الدرس 1 : مبادئ في المنطق

عناصر التوجيهات التربوية	مكونات المقرر الرسمي
- ينبغي تقريب العبارات والقوانين المنطقية وطرائق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق له التعامل معها ولا يشكل الجانب الرياضي عقبة أمام تناولها - ينبغي تجنب البناء النظري لهذه المبادئ والإفراط في استعمال جداول الحقيقة - إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة لذلك، بمختلف فصول المقرر اللاحقة	✓ العبارات، العمليات على العبارات، المكممات ✓ ✓ الاستدلالات الرياضية: الاستدلال بالخلف، الاستدلال بفصل الحالات، الاستدلال بالتكافؤ

تقديم:

يلجأ كل فرد منا في حياته اليومية إلى الدفاع عن قناعته و آرائه التي يتمسك بها، ومن أجل ذلك نجده مجبرا على التفكير و المقارنة والافتراض والتحليل واصدار أحكام، وعموما فإنه يلجأ إلى جميع المواقف إلى تبني الإستدلال المناسب للدفاع عن تلك القناعات و الآراء الشخصية، كما هو الأمر مثلا عند لاعب الشطرنج.ومن هذا المنطلق سنتطرق في بعض فقرات هذا الدرس إلى أنواع الإستدلالات الرياضية، لأن من بين أسباب الفشل الدراسي في الرياضيات عجز التلاميذ عن التمكن من القدرة على الإستدلال الصحيح وفقرهم إلى أدوات البحث.

I. العبارات-العمليات على العبارات:

1) العبارات

نشاط: صحيح أم خطأ:

P1: "الرباط هي عاصمة المملكة المغربية" V

P2: "يبلغ عدد سكان المغرب 100 مليون نسمة سنة 2006 " F

P3: "8*4=32 " V

P4: "العدد 17 عدد أولي " V

تعريف: نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا.

أمثلة:

- العبارة " 6*4=20" خاطئة.
- العبارة " مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي" صحيحة .
- العبارة " $\sqrt{2} \in Q$" خاطئة .

ملحوظة: لا يمكن أن تكون عبارة صحيحة وخاطئة في نفس الوقت أوغير صحيحة وغير خاطئة.

2) العمليات على العبارات:

2-1) نفي عبارة :

نشاط: في حوار جرى بين فاطمة و أحمد أساسه أن كل ما قالته فاطمة ينفيه أحمد وكل ما قاله أحمد تنفيه فاطمة.

انقل الجدول التالي إلى دفترك ثم املأه:

ما قالته فاطمة	ما قاله أحمد	حكمك على قول فاطمة	حكمك على قول أحمد
$\sqrt{2} \in IN$	$\sqrt{2} \notin IN$	خاطئ	صحيح
$7+2 \geq 5$	$7+2<5$	صحيح	خاطئ
16 مضاعف للعدد 4	16 غير مضاعف للعدد 4	صحيح	خاطئ
$(-2)^2 \neq 4$	$(-2)^2 = 4$	خاطئ	صحيح

تعريف: نفي عبارة P هي العبارة التي نحصل عليها انطلاقا من P ونرمز لها بالرمز $\overline{P}$ (و تقرأ نفي P). وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة، وتكون صحيحة إذا كانت P خاطئة.

ملاحظة: لتكن P عبارة. نعبر عن قيمة حقيقية عبارة P باستعمال جدول نسميه جدول الحقيقة.

- P إما تكون عبارة صحيحة. وفي هذه الحالة يرمز لها بالرمز V أو العدد 1.
- و إما تكون خاطئة فيرمز لها بالرمز F أو 0.

P
V
F

أو

P
1
0

مثال:

- نفي العبارة " $3*3=9$" هي العبارة "$3*3 \neq 9$"
- نفي العبارة " $x^2<0$" هي العبارة "$x^2 \geq 0$"
- نفي العبارة " $\sqrt{3} \in IN$" هي العبارة "$\sqrt{3} \notin IN$"

جدول حقيقة نفي عبارة:

$\overline{P}$	P
F	V
V	F

2-2) عطف عبارتين:

تعريف:

عطف عبارتين P و Q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز (P و Q) أو $(P \wedge Q)$ و التي تكون صحيحة فقط اذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا.

أمثلة:

- العبارة "$5 \in IN$ و $5*1=5$ " عبارة صحيحة .
- العبارة "$4^2=8$ و $\sqrt{4}=-2$ عبارة خاطئة .
- العبارة "$5*5=25$ و $2<4$ " عبارة خاطئة .

جدول حقيقة عطف عبارتين:

P و Q	Q	P
V	V	V

V	F	F
F	V	F
F	F	F

تطبيق: أدرس صحة العبارات التالية:

- ✓ " **13** عدد فردي و $15 < 14$ " F
- ✓ " **6** عددزوجي و **6** يقسم **22** " F
- ✓ "$\prod \notin Q$ و $2 = (\sqrt{2})^2$ " V

2-3) فصل عبارتين:

تعريف: فصل عبارتين P و Q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان P و Q خاطئتين مع و نركز لها بالرمز (P أو Q) أو بالرمز $(P \vee Q)$

أمثلة:

- العبارة "$\frac{5}{2} = 2.5$ أو $3 \neq 2$ " عبارة صحيحة .
- العبارة "$13 < 5$ أو $6 = 10 - 4$" عبارة صحيحة .
- العبارة "$3^3 = 27$ أو $\frac{5}{3} > 1$" عبارة صحيحة .
- العبارة " **17** عدد زوجي أو $2 * 3 = 5$" عبارة خاطئة .

جدول حقيقة فصل عبارتين:

P	Q	P أو Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

تطبيق: ادرس صحة العبارات التالية:

- ✓ "$14 > 2$ أو $5 = 4$ " V
- ✓ "$4 + 4 = 9$ أو $8^2 + 1 > 0$ " V
- ✓ "$4^2 = 3^2$ أو $5^2 = 24$ " F

2-4) استلزام عبارتين:

تعريف: استلزام عبارتين P و Qهو العبارة التي تكون خاطئة فقط اذا كانت P صحيحة و Q خاطئة ونرمز لها بالرمز $(P => Q)$.

أمثلة:

- ✓ الإستلزام " $3 < 5 => (-1)^2 = 1$ " V
- ✓ الإستلزام " $3^2 = -9 => 4 < 2$ " V
- ✓ الإستلزام " 5 عدد فردي $=> 2^2 = -4$ " F

جدول حقيقة استلزام عبارتين:

P	Q	P => Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ملاحظة:

- العبارتان Q => P و P => Q مختلفتان.
- الإستلزام Q => P يسمى الاستلزام العكسي للاستلزام P => Q
- العبارة P => Q تقرأ: "P تستلزم Q" أو إذا كان P فإن Q.

تطبيق:

ادرس صحة الإستلزام:" $(x = 5$ و $y = 6) => 2x + 3y = 28$ " V

2-5) تكافؤ عبارتين:

تعريف: تكافؤ عبارتين P و Q هو العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتين معا أو خاطئتين معا. ونرمز لها بالرمز $(P <=> Q)$

العبارة $(P <=> Q)$ تقرأ : " P تكافئ Q" أو "P إذا وفقط إذا كان Q " أو " P شرط لازم وكاف لكي تكون Q".

أمثلة:

- التكافؤ: "$(4 \in IN <=> 8 \geq 3)$" صحيح.
- التكافؤ: "(5 عدد فردي $<=> \sqrt{5} \in IN$)" خاطئ.
- التكافؤ: "$(x = 1 <=> x + 1 = 2)$" صحيح.

جدول حقيقة تكافؤ عبارتين:

P	Q	P <=> Q

V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

تطبيق: (5 قاسم 1085 <=> 5 عدد أولي)   V

II. الدالة العبارية-المكممات:

1) الدالة العبارية:

تعريف:

الدالة العبارية هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة.

مثال:

- " $(x \in IR);\ x^2 - 1 = 0$ " دالة عبارية. من أجل x=-1 و x=1 هي عبارة صحيحة وما عدا ذلك فهي عبارة خاطئة.
- " $(x \in IR^*);\ \sqrt{x} = 2$ " دالة عبارية . من أجل x=4 هي عبارة صحيحة و من أجل $x \neq 4$ هي عبارة خاطئة.

2) المكممات:

لتكن P(x) دالة عبارية للمتغير x من E.

- انطلاقا من P(x) نكون العبارة " $(\exists\ x \in E);\ P(x)$ " و التي تكون صحيحة فقط إذا وجد على الأقل عنصر من E يحقق الخاصية P(x).
  الرمز "$\exists$" يسمى المكمم الوجودي. العبارة "$(\exists\ x \in E);\ P(x)$" تُقرأ " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية P(x) .
- انطلاقا من P(x) نكون العبارة " $(\forall x \in E);\ P(x)$ " و التي تكون صحيحة فقط إذاكانت جميع عناصر المجموعة تحقق الخاصية P(x).
  الرمز "$\forall$" يسمى المكمم الكوني. العبارة "$(\forall x \in E);\ P(x)$" تُقرأ " مهما يكن x من E لدينا P(x) " أو " لكل عنصر x من E لدينا P(x) "

أمثلة:

- مهما يكن x من IR، فإن $x^2 \geq 0$ ، وبالتالي نكتب: "$(\forall x \in E);\ x^2 \geq 0$"
- العبارة " $(\exists\ x \in IR);\ x^2 + 1 = 0$ " عبارة خاطئة.

3) نفي عبارة مكممة:

- نفي العبارة "$(\forall x \in E);\ P(x)$" هو العبارة "$(\exists\ x \in E);\ \overline{P(x)}$"
- نفي العبارة "$(\exists\ x \in E);\ P(x)$" هو العبارة "$(\forall x \in E);\ \overline{P(x)}$"

أمثلة:

- نفي العبارة $"(\forall x \in E);\ x^2+1>0"$ هو العبارة $"(\exists\, x \in E); x^2+1 \leq 0"$
- نفي العبارة $"(\exists\, x \in E); x+1=0"$ هو العبارة $"(\forall x \in E);\ x+1 \neq 0"$

III.الاستدلالات الرياضية:

يعتمد الاستدلال الرياضي على بعض المبادئ والقواعد الأساسية كما ترتكز البرهنة على صحة عبارة على القواعد و الخاصيات و المبرهنات التي سبق أن بيناها أو قبلنا صحتها وكذلك على التعاريف والاصطلاحات المتفق عليها و على القواعد المنطقية.

1- الاستدلال بالتكافؤ:

للبرهنة على أن عبارة P تكافئ عبارة Q نظطر أحيانا لاستعمال عبارة أخرى R فنبين أن : $P <=> R$ و $R <=> Q$

ثم نستنتج أن $P <=> Q$

مثال: a عدد حقيقي، لنبين أن : $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$

لدينا $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2} <=> 2a \leq 1+a^2 <=> a^2-2a+1 \geq 0 <=> (a-1)^2 \geq 0$

وبما أن العبارة $(a-1)^2 \geq 0$ صحيحة وتكافئ العبارة $a^2-2a+1 \geq 0$ فإن $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$

2-الاستدلال بفصل الحالات:

للبرهنة على أن العبارة (P أو Q) تستلزم العبارة R، نبين أن $P => Q$ صحيحة و أن $Q => R$ صحيحة كذلك، ثم نستنتج أن $R <=$ (P أو Q)

ملاحظة:

عمليا غالبا ما تكون العبارة Q هي العبارة $\overline{P}$، ولكي نبين أن $R <=$ (P أو $\overline{P}$)

يكفي أن نبين أن $P => R$ وأن $\overline{P} => R$

مثال: حل في IR المعادلة : $x^2-|x+1|+1=0$

- اذا كان $x \geq -1$ فإن المعادلة تصبح $x^2-x=0$ اذن x=0 أو x=1
- اذا كان $x < -1$ فإن المعادلة تصبح $x^2+x+2=0$ وبالتالي $\Delta < 0$ وفي هذه الحالة ليس لها حل.

3- الاستدلال بالخلف:

للبرهنة على أن عبارة Q هي عبارة صحيحة نتبع الخطوات التالية:

- نفترض أن العبارة Q خاطئة.
- نستنتج بناءعلى هذا الافتراض وعلى المعطيات والخاصيات الرياضية أن عبارة P ونفيها $\overline{P}$ عبارتان صحيحتان معا وهذا غير مقبول.
- نستنتج أن العبارة Q صحيحة.

مثال: أثبت أن العبارة "$(\forall x \in E);\ x^2 + 1 \neq 0$" صحيحة

نفترض أنها خاطئة أي $(\exists x \in E);\ x^2 + 1 = 0$ عبارة صحيحة ، اذن $\Delta < 0$، هذا يعني أنه لا يوجد أي عدد حقيقي x يحقق المعادلة $x^2 + 1 = 0$ وبالتالي فهناك تناقض.

ومنه فإن "$(\forall x \in E);\ x^2 + 1 \neq 0$" صحيحة