| دروس الدعم و التقوية في مادة الرياضيات | تطبيقات تحليلية للجداء السلمي ملخص | السنة الأولى علوم رياضية |
|---|---|---|

## I- الصيغة التحليلية للجداء السلمي:

المستوى $(P)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\Re(O,\vec{i},\vec{j})$ .

**خاصية01:**

إذا كانت $(x,y)$ و $(x',y')$ هما على التوالي زوجا إحداثيتي متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الأساس $B(\vec{i},\vec{j})$ ، فإن : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ .

### 1)- الصيغة المثلثية لمتجهة:

**خاصية02:**

إذا كانت $\vec{u}(x,y)$ متجهة غير منعدمة من $V_2$ و $\theta$ هو قياس الزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{i},\vec{u}})$ ، فإن : $\begin{cases} x=\|\vec{u}\|\cos\theta \\ y=\|\vec{u}\|\sin\theta \end{cases}$

إذن : $\vec{u}=\|\vec{u}\|(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})$

**ملحوظة:** إذا كانت $\vec{v}$ متجهة غير منعدمة من $V_2$ بحيث : $\begin{cases} \|\vec{v}\|=\|\vec{u}\| \\ \overline{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ، فإن $\vec{v}(-y,x)$ .

### 2)- صيغة $\cos\overline{(\vec{u},\vec{v})}$ و $\sin\overline{(\vec{u},\vec{v})}$ :

**خاصية03:** لكل متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ من $V_2$ لدينا :

$$\cos\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\sin\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

و إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدتين ، فإن :

$$\tan\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\vec{u}.\vec{v}}=\frac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{xx'+yy'}$$ .

### 3)- متفاوتة كوشي شوارتز:

**خاصية04:** لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $V_2$ لدينا :

$$|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

ويكون التساوي إذا وفقط إذا إذا كانت $\vec{u}$ مستقيمية مع $\vec{v}$ .

**إستنتاج:** - $\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$ :

$$|xx'+yy'|\leq\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}$$ .

-- **المتفاوتة المثلثية:** لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $V_2$

لدينا : $\|\vec{u}\pm\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ ،

ويكون التساوي إذا وفقط إذا إذا كانت $\vec{u}$ مستقيمية مع $\vec{v}$ .

■ **وبصفة عامة:**

$$\big|\|\vec{u}\|\pm\|\vec{v}\|\big|\leq\|\vec{u}\pm\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$$ .

## II- دراسة تحليلية للدائرة:

### 1)- معادلة ديكارتية لدائرة:

-- إذا كانت $(C)$ دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ و شعاعها $r$ فمعادلة ديكارتية لها هي : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

-- إذا كانت $(C)$ دائرة أحد أقطارها $[AB]$ ، فمعادلة ديكارتية لها هي :

$$(x-x_A).(x-x_B)+(y-y_A).(y-y_B)=0$$

مركز $(C)$ هي النقطة $\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

و شعاعها $r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ .

-- من ثلاث نقط غير مستقيمية $A$ و $B$ و $C$ تمر في المستوى $(P)$ دائرة وحيدة $(C)$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ ، مركزها $\Omega$ هي نقطة تلاقي واسطات المثلث $ABC$ ( $\Omega A=\Omega B=\Omega C$ ) و شعاعها $r=\Omega A$ .

-- **مثال:** بين أن $A(2,3)$ و $B(-2,-1)$ و $C(1,-1)$ نقط غير مستقيمية و حدد معادلة الدائرة $(C)$ المحيطة بالمثلث $ABC$ .

| السنة الأولى علوم رياضية | تطبيقات تحليلية للجداء السلمي ملخص | دروس الدعم و التقوية في مادة الرياضيات |
|---|---|---|

## 2)- تمثيل بارامتري لدائرة:

**خاصية05:** النظمة $(1):\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$ تمثيل بارامتري للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r$ .

**ملحوظة:** للحصول على تمثيل بارامتري للدائرة $(C)$ في النظمة $(1)$ يكفي أن يتغير البارامتر $\theta$ على مجال سعته $2\pi$ فقط ، مثل $[-\pi,\pi[$ أو $[0,2\pi[$ .

## 3)- دراسة المعادلة $(E)$ حيث:

$$(E): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

**خاصية06:** تكون $(E)$ معادلة لدائرة $(C)$ إذا وفقط إذا كان $a^2 + b^2 - c \geq 0$ ، مركز $(C)$ في هذه الحالة هو $\Omega(a,b)$ و شعاعها هو $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

## 4)- تجويه المستوى بدائرة:

**خاصية07:** إذا كانت $(C)$ دائرة معادلتها : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ، فإن داخل الدئرة $(C)$ هو مجموعة النقط $M(x,y)$ من $(\mathrm{P})$ بحيث :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \prec 0$$

و خارجها مجموعة النقط $M(x,y)$ من $(\mathrm{P})$ بحيث:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \succ 0 .$$

هذا يعني أن كل دائرة $(C)$ تجزء المستوى $(\mathrm{P})$ إلى ثلاثة أجزاء وهي $Int(C)$ و $Ext(C)$ و $(C)$ .

## 5)- الأوضاع النسبية لدائرة و مستقيم:

**خاصية08:** لتكن $(C)$ دائرة مركزها $\Omega$ و شعاعها $r$ و $(D)$ مستقيما ، نضع $d = d(\Omega,(D))$ .

هناك ثلاثة أوضاع ممكنة بالنسبة ل$(D)$ و $(C)$ و هي :

-- $d \succ r \Leftrightarrow (C)\cap(D) = \varnothing$ ، نقول إن $(D)$ خارج الدائرة $(C)$ .

-- $d = r \Leftrightarrow (C)\cap(D) = \{H\}$ ، نقول إن $(D)$ مماس للدائرة $(C)$ في النقطة $H$ .

-- $d \prec r \Leftrightarrow (C)\cap(D) = \{A,B\}$ ، $(D)$ في هذه الحالة يخترق $(C)$ في نقطتين مختلفتين $A$ و $B$ .

## 6)- المماس لدائرة في إحدى نقطها:

-- إذا كانت $(C)$ دائرة مركزها $\Omega$ و $A$ نقطة من $(C)$ فالمماس $(\Delta)$ ل $(C)$ في $A$ يقبل $\overrightarrow{\Omega A}$ متجهة منظمية عليه ، إذن $(\Delta) = \{M \in (\mathrm{P}) / \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0\}$ .

**خاصية09:** إذا كانت $(C)$ دائرة معادلتها : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ، فمعادلة ديكارتية للمماس $(\Delta)$ ل $(C)$ في إحدى نقطها $A$ هي :

$$x_A x + y_A y - a(x_A + x) - b(y_A + y) + c = 0$$

## 7)- الأوضاع النسبية لدائرتين:

لتكن $(C)$ و $(C')$ دائرتين مركزاهما $\Omega$ و $\Omega'$ بحيث $\Omega \neq \Omega'$ و شعاعاهما $r$ و $r'$ ، نضع : $d = \Omega\Omega'$

لدينا : $(C)\cap(C') \neq \varnothing \Leftrightarrow |r - r'| \leq d \leq r + r'$

و تتضمن هذه الحالة ثلاث و ضعيات ممكنة :

-- $(C)$ و $(C')$ يتقاطعان في نقطتين إذا وفقط إذا كان :

$$|r - r'| \prec d \prec r + r' .$$

-- $(C)$ و $(C')$ متماستين خارجيا إذا وفقط إذا كان :

$$d = r + r' .$$

-- $(C)$ و $(C')$ متماستين داخليا إذا وفقط إذا كان :

$$d = |r - r'| .$$

-- وأخيرا لدينا :

$$(C)\cap(C') = \varnothing \Leftrightarrow d \prec |r - r'| \text{ أو } d \succ r + r'$$

$$d \succ r + r' \Leftrightarrow (C') \subset Ext(C)$$

و $d \prec r - r' \Leftrightarrow (C') \subset Int(C); (r' \prec r)$