

I \_ مقارنة عددين حقيقيين :

(1) – قاعدة ① :

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان .  
إذا كان  $a \leq b$  فإن  $a - b \leq 0$   
إذا كان  $a \geq b$  فإن  $a - b \geq 0$

(2) – أمثلة :

(1) -- لنقارن العددين :  $2\sqrt{3} - 4$  و  $\sqrt{3} - 5$

لدينا :

$$\begin{aligned} (2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) &= 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 5 \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5 - 4 \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

وبما أن :  $\sqrt{3} + 1 \geq 0$  فإن :  $(2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) \geq 0$

و منه فإن :  $2\sqrt{3} - 4 \geq \sqrt{3} - 5$

(2) -- لنقارن العددين :  $x$  و  $y$  بحيث :  $x = y - 3$  .

لدينا :  $x - y = -3$

وبما أن :  $-3 \leq 0$  فإن :  $x - y \leq 0$  .

و منه فإن :  $x \leq y$

II \_ الترتيب و العمليات :

(1) – الترتيب و الجمع :

(أ) -- خاصية ① :

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية .  
إذا كان  $a \leq b$  فإن  
 $a + c \leq b + c$

\* مثال :

نعتبر  $x$  عددا حقيقيا بحيث :  $x < 3$  .  
لنقارن العددين  $-2$  و  $x - 5$  .

لدينا :  $x < 3$

يعني أن :

$$x + (-5) < 3 + (-5)$$

$$x - 5 < 3 - 5$$

و بالتالي فإن :  $x - 5 < -2$

(ب) -- خاصية ② :

$a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعداد حقيقية .

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ إذا كان و } a + c \leq b + d \text{ فإن}$$

\* مثال :

$x$  و  $y$  عددان حقيقيان بحيث :  $x < 3$  و  $2 > y$  .  
لنبين أن :  $x + y < 5$  .

$$\left. \begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array} \right\} \text{ يعني أن } \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array} \right\} \text{ لدينا}$$

إذن :  $x + y < 2 + 3$

و بالتالي فإن :  $x + y < 5$

(2) – الترتيب و الضرب :

(أ) -- خاصية ① :

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية .  
إذا كان  $a \leq b$  و  $c > 0$  فإن  $a \times c \leq b \times c$   
إذا كان  $a \leq b$  و  $c < 0$  فإن  $a \times c \geq b \times c$   
إذا كان  $a \leq b$  و  $c > 0$  فإن  $a \times c \leq b \times c$   
إذا كان  $a \leq b$  و  $c < 0$  فإن  $a \times c \geq b \times c$

\* مثال :

$$\begin{array}{l} \text{لدينا : } 11 \leq 27 \text{ يعني أن } 11 \times 5 \leq 27 \times 5 \\ \text{يعني أن } 11 \leq 27 \text{ يعني أن } 11 \times (-4) \geq 27 \times (-4) \end{array}$$

(ب) -- خاصية ② :

$a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعداد حقيقية .

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{إذا كان و} \quad \text{فإن } a \times c \leq b \times d$$

\* مثال :

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان موجبان بحيث :  $x < \sqrt{3}$  و  $y < 2\sqrt{6}$  .

لنبين أن :  $xy < 6\sqrt{3}$  .

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array} \right\} \text{يعني أن :}$$

$$x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$

$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$

$$xy < 2\sqrt{18}$$

$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$

$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

$$xy < 6\sqrt{2} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

(3) – الترتيب و المقلوب :

(أ) -- خاصية :

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان موجبان قطعاً .

$$\text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$\text{إذا كان } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ فإن } a \leq b$$

(ب) -- مثال :

$$\text{لدينا : } 7 \leq 13 \quad \text{يعني أن} \quad \frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$$

$$\text{يعني أن} \quad 11 \geq 5 \quad \frac{1}{11} \leq \frac{1}{5}$$

(4) – الترتيب و المربع :

(أ) -- خاصية ① :

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان موجبان .  
إذا كان  $a \leq b$  فإن  $a^2 \leq b^2$   
إذا كان  $a^2 \leq b^2$  فإن  $a \leq b$

\* مثال :

$$5 \leq 11 \text{ يعني أن } 5^2 \leq 11^2 \text{ أي } 25 \leq 121 .$$

(ب) -- خاصية ② :

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان سالبان .  
إذا كان  $a \leq b$  فإن  $a^2 \geq b^2$   
إذا كان  $a^2 \geq b^2$  فإن  $a \leq b$

\* مثال :

$$-7 \leq -2 \text{ يعني أن } (-7)^2 \geq (-4)^2 \text{ أي } 49 \geq 16$$

(5) – الترتيب و الجذر المربع :

(أ) -- خاصية :

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان موجبان .  
إذا كان  $a \leq b$  فإن  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$   
إذا كان  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$  فإن  $a \leq b$

\* أمثلة :

$$(1) - \text{لنقارن العددين : } \sqrt{10} \text{ و } 3\sqrt{3} .$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{10}^2 = 10 \\ (3\sqrt{3})^2 = 27 \end{array} \right\} \text{و}$$
$$\text{إذن } \sqrt{10}^2 \leq (3\sqrt{3})^2 \text{ و منه فإن } \sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$$

$$(2) - \text{لنقارن العددين : } -\sqrt{6} \text{ و } -3\sqrt{2} .$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{6}^2 = 6 \\ (3\sqrt{2})^2 = 18 \end{array} \right\} \text{و}$$
$$\text{إذن } \sqrt{6}^2 \leq (3\sqrt{2})^2 \text{ و منه فإن } \sqrt{6} \leq 3\sqrt{2} . \text{ و بالتالي فإن : } -\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$$

(1) - تآطير مجموع عددين :

$$a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث :}$$

$$x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t$$

$$x + z \leq a + b \leq y + t$$

\* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2$$

لنؤطر  $x + y$  .

لدينا :

$$3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$$

$$\text{إذن : } -1 \leq x + y \leq 10$$

(2) - تآطير مقابل عدد حقيقي :

$$a \text{ عدد حقيقي بحيث : } x \leq a \leq y$$

$$\text{سيكون لدينا : } -y \leq -a \leq -x$$

(3) - تآطير فرق عددين :

$$a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث :}$$

$$x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t$$

$$x - t \leq a - b \leq y - z$$

\* ملاحظة هامة : لتآطير  $a - b$  ، نضع :  $a - b = a + (-b)$  ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

\* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2$$

لنؤطر  $x - y$  .

لدينا :

$$3 \leq x \leq 8 \text{ و } -2 \leq -y \leq 4$$

$$\text{إذن : } 3 - 2 \leq x + (-y) \leq 8 + 4$$

$$\text{و منه فإن : } 1 \leq x - y \leq 12$$

(4) - تأطير جداء عددين :

$$\begin{aligned} & a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية موجبة بحيث :} \\ & z \leq b \leq t \text{ و } x \leq a \leq y \\ & x \times z \leq a \times b \leq y \times t \end{aligned}$$

\* مثال 1 :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 7 \text{ و } 1 \leq y \leq 3$$

لنؤطر  $x \times y$  .

لدينا :

$$3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$$

$$\text{إذن : } 3 \leq x \times y \leq 21$$

\* مثال 2 :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } -5 \leq x \leq -2 \text{ و } 3 \leq y \leq 6$$

لنؤطر  $x \times y$  .

لدينا :

$$2 \leq -x \leq 5$$

إذن :

$$6 \leq -xy \leq 30 \text{ أي } 2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6$$

$$\text{و منه فإن : } -30 \leq xy \leq -6$$

(5) - تأطير مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

$$\begin{aligned} & a \text{ و } x \text{ و } y \text{ أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : } x \leq a \leq y \\ & \text{سيكون لدينا : } \frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(6) - تأطير خارج عددين :

$$\begin{aligned} & a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث : } t \neq 0 \text{ و } z \neq 0 \text{ و } b \neq 0 \\ & z \leq b \leq t \text{ و } x \leq a \leq y \\ & \text{سيكون لدينا } \frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z} \end{aligned}$$

\* ملاحظة هامة : لتأطير  $\frac{a}{b}$  ، نضع :  $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$  ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

\* مثال :

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث :  $3 \leq x \leq 7$  و  $5 \leq y \leq 9$

$$\text{لنؤطر } \frac{x}{y}$$

لدينا :

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$$

إذن :

$$\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5} \quad \text{أي} \quad 3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$

\* تمرين تطبيقي :

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية بحيث :

$$-3 \leq c \leq 5 \quad \text{و} \quad -4 \leq b \leq -2 \quad \text{و} \quad 6 \leq a \leq 8$$

$$\text{أطر : } a^2 \quad \text{و} \quad b^2 \quad \text{و} \quad a+2b-4c \quad \text{و} \quad \frac{a+b}{b^2}$$

الحل :

$$(1) - \text{تأطير } a^2 .$$

$$\text{لدينا : } 6^2 \leq a^2 \leq 8^2 \quad \text{و منه فإن : } 36 \leq a^2 \leq 64$$

$$(2) - \text{تأطير } b^2 .$$

$$\text{لدينا : } (-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2 \quad \text{و منه فإن : } 4 \leq b^2 \leq 16$$

$$(3) - \text{تأطير } a+2b-4c .$$

$$\text{لدينا : } -8 \leq 2b \leq -4$$

$$\text{و } -4 \times (-3) \leq -4c \leq -4 \times 5 \quad \text{أي} \quad 12 \leq -4c \leq 20$$

$$\text{إذن : } 6 + (-8) + 12 \leq a + 2b - 4c \leq 8 + (-4) + 20$$

$$\text{و منه فإن : } 10 \leq a + 2b - 4c \leq 24$$

$$(4) - \text{تأطير } \frac{a+b}{b^2} .$$

$$\text{لدينا : } 6 + (-4) \leq a + b \leq 8 + (-2) \quad \text{أي} \quad 2 \leq a + b \leq 6$$

$$\text{و} \quad \frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{إذن : } 2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \times \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4} \quad \text{أي} \quad \frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4}$$

$$\text{و بالتالي فإن : } \frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}$$