1) اثبات المتفاوتة $u_n \geq 0$:

• لدينا : $u_0 = 0$ ومنه $u_0 \geq 0$.

• نفترض أن $u_n \geq 0$ ولنبين أن $u_{n+1} \geq 0$.

لدينا : $u_n \geq 0$ و $3^n \geq 0$ ومنه : $u_n + 3^n \geq 0$.

اي : $u_{n+1} \geq 0$

إذن : $u_n \geq 0$ لكل n من IN.

دراسة رتابة (u_n) :

ليكن n عنصراً من IN. لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = (2u_n + 3^n) - u_n = u_n + 3^n$$

بما أن $u_n \geq 0$ فإن $u_n + 3^n \geq 0$ أي : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

إذن : $u_{n+1} \geq u_n$ أي : (u_n) متتالية تزايدية.

2) **أ– (v_n) متتالية هندسية :**

ليكن n عنصراً من IN. لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3^{n+1} - u_{n+1} \\ &= 3^{n+1} - (2u_n + 3^n) \\ &= 3^{n+1} - 2u_n - 3^n \end{aligned}$$

بما أن $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ فإن :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3 \,.\, 3^n - 3^n - 2u_n \\ &= 2 \,.\, 3^n - 2u_n \\ &= 2\,(3^n - u_n) \end{aligned}$$

بما أن $v_n = 3^n - u_n$ فإن : $v_{n+1} = 2v_n$.

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 2.

ب– حساب v_n و u_n

• لدينا : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الاول $v_0 = 3^0 - u_0 = 1 - 0 = 1$.

ومنه : $v_n = v_0\, q^n = 1 \,.\, (2)^n = 2^n$.

• لدينا : $v_n = 3^n - u_n$ أي : $u_n = 3^n - v_n$.

إذن : $u_n = 3^n - 2^n$ لكل n من IN.

جـ– حساب نهاية u_n :

ليكن n عنصراً من IN. لدينا

$$u_n = 3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1$

وبما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

د– حساب المجموع S_n :

ليكن n عنصراً من IN. لدينا :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

وبما أن $u_i = 3^i - v_i$ فإن :

$$\begin{aligned} S_n &= (3^0 - v_0) + (3 - v_1) + (3^2 - v_2) + \dots + (3^n - v_n) \\ &= (3^0 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} - v_0 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{3^{n+1}-1}{2} - \frac{2^n-1}{1}$$

أي :

$$S_n = 3^{n+1} - 2^{n+2} + 1$$