-1 * حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

لكل x من IR^{+*}، $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(2 + \ln x)$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} (2 + \ln x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

* حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

لكل x من IR^{+*}، $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

و $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ (وضعنا $t = \sqrt{x}$)

فإن : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

* التأويل الهندسي

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ أي محور الأراتيب هو مقارب رأسي للمنحنى $\mathscr{C}$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ أي محور الأفاصيل هو مقارب أفقي للمنحنى $\mathscr{C}$

-2 * حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*} :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x}-\sqrt{x}\ln x}{2x}}{x} = \frac{-\sqrt{x}\ln x}{2x^2}$$

$$= \frac{-x\ln x}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

* تغيرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-\ln x$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

-3 * حساب $f''(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*} :

$$f''(x) = \left(\frac{-\ln x}{2x\sqrt{x}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{x}\cdot x\sqrt{x} - \left(\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln x}{x^3}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x} - \left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\ln x}{x^3}\right] = -\frac{1}{2}\,\frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{x}\ln x}{2x^3}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(3\ln x - 2)}{4x^3} = \frac{x(3\ln x-2)}{4x^3\sqrt{x}} = \frac{3\ln x - 2}{4x^2\sqrt{x}}$$

* نقطة الانعطاف

إشارة $f''(x)$ هي إشارة $3\ln x - 2$

ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f''(x)$ وتقعر المنحنى $\mathscr{C}$:

x	0		$e^{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تقعر $\mathscr{C}$	‖	$\frown$		$\smile$	

الدالة " f تنعدم مع تغيير الإشارة في العدد $e^{\frac{2}{3}}$

إذن المنحنى $\mathscr{C}$ يقبل نقطة انعطاف I أفصولها $e^{\frac{2}{3}}$

وأرتوبها هو :

$$f\left(e^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2 + \ln e^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{3}}}} = \frac{2 + \frac{2}{3}}{e^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{3e^{\frac{1}{3}}}$$

-4 أ — دراسة تقاطع $\mathscr{C}$ مع محور الأفاصيل

لذلك نحل في IR^{+*} المعادلة $f(x) = 0$

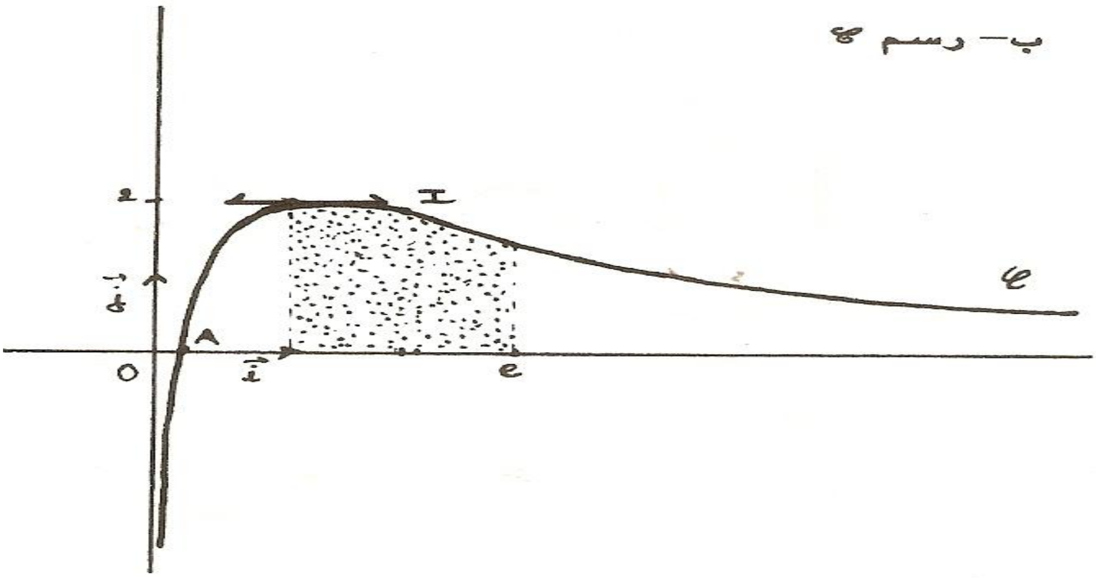
أي : $\ln x = -2$ أي : $\ln x = \ln e^{-2}$

أي : $x = e^{-2}$

وبما أن $e^{-2} \in IR^{+*}$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $\{e^{-2}\}$

وبالتالي فإن محور الأفاصيل يقطع المنحنى $\mathscr{C}$ في النقطة $A(e^{-2}, 0)$

ب — رسم $\mathscr{C}$



-5 أ — لنبين أن F دالة أصلية للدالة f على $]0, +\infty[$

الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا لكل x من $]0, +\infty[$:

$$F'(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2 + \ln x}{\sqrt{x}} = f(x)$$

إذن الدالة F هي بالفعل دالة أصلية للدالة f على المجال $]0, +\infty[$

ب— حساب المساحة $\mathcal{A}$

لدينا : $\mathcal{A} = \int_{1}^{e} f(x)\,dx$

$= [f(x)]_1^e = 2\,[\sqrt{x}\ln x]_1^e = 2\,(\sqrt{e} - 0)$

إذن : $\mathcal{A} = 2\sqrt{e}$ (بوحدة المساحة)