1) مجموعة تعريف f :

بما أن $e^x + 1 > 0$ لكل x من IR فإن $\ln(e^x + 1) \in IR$ لكل x من IR .

إذن : مجموعة تعريف f هي $]-\infty , +\infty[= IR$.

2) نهايتا f :

• لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(e^x + 1)) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1$

ومنه : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\ln(e^x + 1) + \frac{e^x}{e^x + 1} + 1 \right] = 0$

(لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$)

3) أ– حساب $f'(x)$:

ليكن x عنصرا من IR . لدينا :

$$f(x) = \ln(e^x + 1) + \frac{e^x}{e^x + 1} + 1$$

ومنه :

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} + \frac{(e^x)'(e^x + 1) - e^x(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x + 1) + e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

إذن : $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 1)^2}$ لكل x من IR .

ب – جدول تغيرات f :

لدينا : $e^{2x} + 2e^x > 0$ لكل x من IR .

ومنه : $f'(x) > 0$ لكل x من IR .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	–	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

4) تقعر منحنى f :

ليكن x عنصرا من IR . لدينا :

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2e^{2x} + 2e^x)(e^x + 1)^2 - 2(e^{2x} + 2e^x)(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4}$$

$$= \frac{(2e^{2x} + 2e^{x})(e^{x} + 1) - 2e^{x}(e^{2x} + 2e^{x})}{(e^{x} + 1)^{3}}$$

$$= \frac{2e^{3x} + 2e^{2x} + 2e^{2x} + 2e^{x} - 2e^{3x} - 4e^{2x}}{(e^{x} + 1)^{3}}$$

$$= \frac{2e^{x}}{(e^{x} + 1)^{3}}$$

وبما أن $e^{x} > 0$ فإن $f'(x) > 0$ لكل x من IR .

أي منحنى f محدب على IR .

5) المقارب المائل :

ليكن x عنصرا من IR . لدينا :

$$f(x) = \ln(e^{x} + 1) + \frac{e^{x}}{e^{x} + 1} + 1$$

$$= \ln e^{x}\left(1 + \frac{1}{e^{x}}\right) + \frac{e^{x} + 1 - 1}{e^{x} + 1} + 1$$

$$= \ln e^{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{x}}\right) + 1 - \frac{1}{e^{x} + 1} + 1$$

$$= x + 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{x}}\right) - \frac{1}{e^{x} + 1}$$

وبالتالي : $f(x) - (x + 2) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{x}}\right) - \frac{1}{e^{x} + 1}$

ومنه :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to +\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{e^{x}}\right) - \frac{1}{e^{x} + 1}\right] = 0$$

لأن : $\lim_{x \to +\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{e^{x}}\right)\right] = \ln 1 = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x} + 1} = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مقارب مائل لمنحنى f بجوار $+\infty$.

6) إنشاء منحنى f :