I- 1- * حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} e^x - 1 = 0 - 1 = -1$ و $\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$

* حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

لكل x من IR ، $g(x) = (1 - x) e^x - 1$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (1 - x) = -\infty$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2- حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق IR ولدينا لكل x من IR :

$g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -x e^x$

3- * جدول تغيرات الدالة g

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$

ومنه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

* استنتاج إشارة $g(x)$

من جـدول تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تنعدم من أجـل $x = 0$ وسالبة قطعا على كل من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

خلاصة : $(\forall x \in IR) \quad g(x) \leq 0$

II -1- لنبين أن f متصلة في الصفر

لدينا : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} - 1$

$$= \frac{1}{1} - 1 = 1 - 1 = 0 = f(0)$$

إذن الدالة f متصلة في الصفر

-2 لنبين أن (Δ) مقارب أفقي للمنحنى (𝒞) بجوار $+\infty$

لكل x من IR^* : $f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} - 1$

وبما أن $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن : $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} = 0$

وبالتالي فإن : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$

وهذا يعني أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -1$ مقارب أفقي للمنحنى (𝒞) بجوار $+\infty$

-3 أ- حساب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

لكل x من IR^* ، $f(x) = x \cdot \frac{1}{e^x - 1} - 1$

وبما أن : $\lim_{x\to -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{0-1} = -1$

فإن : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

ب- لنبين أن (Δ') مقارب مائل للمنحنى (𝒞) بجوار $-\infty$

لدينا: $\lim_{x\to -\infty} f(x) - (-x-1) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^x - 1} - 1 + x + 1$

$$= \lim_{x\to -\infty} x\left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to -\infty} x \cdot \frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} x e^x \cdot \frac{1}{e^x - 1} = 0 \cdot \frac{1}{0-1} = 0$$

إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (𝒞) بجوار $-\infty$

ج- تحديد موقع (𝒞) بالنسبة للمستقيم (Δ')

لكل x من IR^* ، $f(x) - (-x-1) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$

إشارة $f(x)-(-x-1)$ هي إشارة $\frac{x}{e^x - 1}$

الجدول التالي يعطي إشارة $f(x) - (-x-1)$ وموقع (𝒞) بالنسبة للمستقيم (Δ') :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$f(x)-(x-1)$		$+$	1	$+$	
موقع $(\mathscr{C})$ بالنسبة ل (Δ')	المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد دائما فوق مقاربه المائل (Δ')				

4- لنبين أن $f'(x) < 0$ لكل x من IR^*

لكل x من IR^* ،
$$f'(x) = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

وبما أن $g(x) < 0$ لكل x من IR^* فإن $f'(x) < 0$ لكل x من IR^*

5- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

6- إنشاء $(\mathscr{C})$ ومماسه في النقطة $O(0,0)$

معادلة ديكارتية لهذا المماس هي : $y = -\frac{1}{2}x$