1- أ – تحديد D

ليكن x عددا حقيقيا

لدينا: $x \in D \Leftrightarrow e^x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow e^x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \neq \ln 2$

إذن : $D =]-\infty , \ln 2 [\cup] \ln 2 , +\infty[$

www.Achamel.net cours pratiques en ligne

ب– حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ و $\ln 2$

• لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-4e^{x}+4}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{2x}\left(1-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^{x}}}{1-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{e^{2x}}}$$

إذن :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1-0}{1-0+0} = 1$$

• لدينا :
$$\lim_{x\to-\infty} e^{x}(e^{x}-1) = 0\,(0-1) = 0$$
و
$$\lim_{x\to-\infty} (e^{x}-2)^{2} = (0-2)^{2} = 4$$
إذن :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

• لدينا :
$$\lim_{x\to\ln 2} e^{x}(e^{x}-1) = 2\,(2-1) = 2$$
و
$$\lim_{x\to\ln 2} (e^{x}-2)^{2} = 0^{+}$$
إذن :
$$\lim_{x\to\ln 2} f(x) = +\infty$$

-2 * حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ولدينا لكل x من D :

$$f'(x) = \frac{(e^{x}(e^{x}-1)+e^{x}.e^{x})(e^{x}-2)^{2}-2(e^{x}-2)e^{x}.e^{x}(e^{x}-1)}{(e^{x}-2)^{4}}$$
$$= \frac{e^{x}(e^{x}-2)((e^{x}-1+e^{x})(e^{x}-2)-2e^{x}(e^{x}-1))}{(e^{x}-2)^{4}}$$
$$= \frac{e^{x}(2e^{2x}-4e^{x}-e^{x}+2-2e^{2x}+2e^{x})}{(e^{x}-2)^{3}} = \frac{e^{x}(-3e^{x}+2)}{(e^{x}-2)^{3}}$$

* جدول تغيرات الدالة f :

لكل x من D ،
$$f'(x) = \frac{e^{x}}{(e^{x}-2)^{2}} \cdot \frac{-3e^{x}+2}{e^{x}-2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة : $\dfrac{-3e^{x}+2}{e^{x}-2}$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$\ln\frac{2}{3}$		$\ln 2$		$+\infty$
$-3e^{x}+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$e^{x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{-1}{8}$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	1

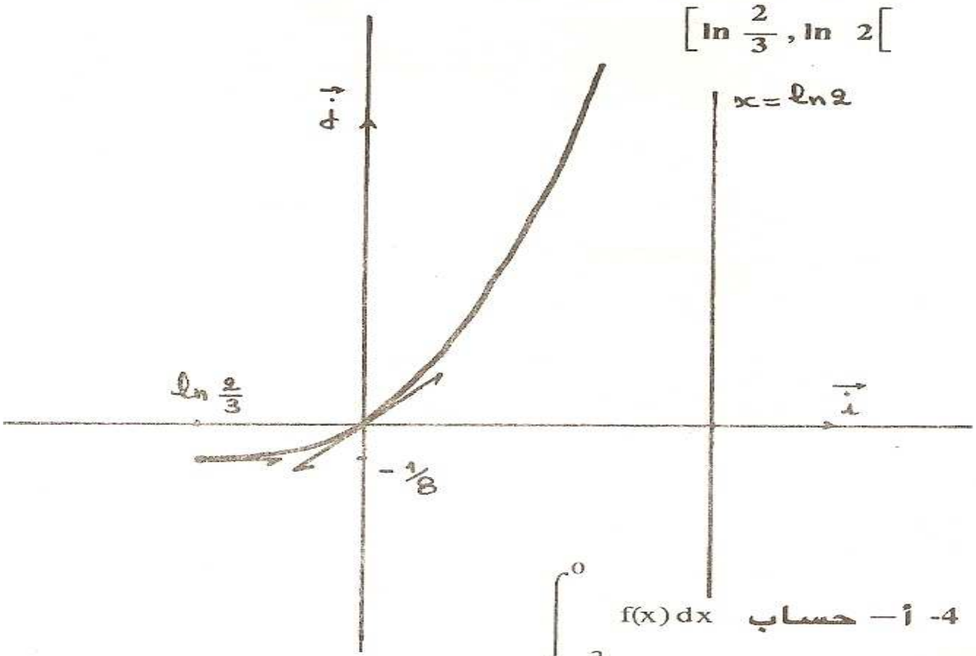
ملاحظة : $f\left(\ln\frac{2}{3}\right)=\dfrac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2}=-\frac{1}{8}$

3- أ– معادلة ديكارتية لماس (C) في النقطة O (0, 0)

معادلة لهذا المماس هي : $y = f'(0)(x-0)+0$

أي : $y = x$

ب– إنشاء جزء المنحنى (C) الموافق للمجال $\left[\ln\frac{2}{3}, \ln 2\right[$



4- أ– حساب $\displaystyle\int_{\ln\frac{2}{3}}^{0} f(x)\,dx$

لدينا : $\displaystyle\int_{\ln\frac{2}{3}}^{0} f(x)\,dx = \int_{\ln\frac{2}{3}}^{0} \frac{e^x(e^x-2+1)}{(e^x-2)^2}\,dx$

$$= \int_{\ln\frac{2}{3}}^{0} \frac{e^x(e^x-2)+e^x}{(e^x-2)^2}\,dx = \int_{\ln\frac{2}{3}}^{0}\left(\frac{e^x}{e^x-2}+\frac{e^x}{(e^x-2)^2}\right)dx$$

$$= \left[\ln|e^x-2| - \frac{1}{e^x-2}\right]_{\ln\frac{2}{3}}^{0} = 0+1-\ln\frac{4}{3}-\frac{3}{4}$$

إذن : $\displaystyle\int_{\ln\frac{2}{3}}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{4}-\ln\frac{4}{3}$

ب– حساب المساحة $\mathcal{A}$

• بما أن $f(x) \leq 0$ لكل x من $\left[\ln\frac{2}{3}, 0\right]$ فإن :

$$\mathcal{A} = \int_{\ln\frac{2}{3}}^{0} -f(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4} + \ln\frac{4}{3}$$