1- * تحديد D

ليكن x عددا حقيقيا

لدينا : $x \in D \Leftrightarrow 4 - x \geq 0$

$\Leftrightarrow -x \geq -4$

$\Leftrightarrow x \leq 4$

إذن : $D =]-\infty , 4]$

*** حساب** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{4-x} = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2- أ-* دراسة قابلية اشتقاق f على اليسار في 4

لدينا :

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{x\sqrt[3]{4-x}}{-(4-x)}$$

$$= \lim_{x \to 4^-} \frac{-x\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt[3]{(4-x)^3}} = \lim_{x \to 4^-} -x\sqrt[3]{\frac{4-x}{(4-x)^3}}$$

$$= \lim_{x \to 4^-} -x\sqrt[3]{\frac{1}{(4-x)^2}} = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0 = 4$

*** التأويل الهندسي**

المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل في النقطة $A\ (4, 0)$ نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى

ب- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $D-\{4\}$ ولدينا لكل x من $D-\{4\}$:

$$f'(x) = \left[x(4-x)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$= (4-x)^{\frac{1}{3}} + x \cdot \frac{1}{3}(4-x)^{\frac{1}{3}-1}(4-x)'$$

$$= (4-x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x(4-x)^{-\frac{2}{3}} = (4-x)^{\frac{-2}{3}}\left(4 - x - \frac{1}{3}x\right)$$

$$= (4-x)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{12-3x-x}{3}\right) = \frac{12-4x}{3} \cdot (4-x)^{\frac{-2}{3}}$$

$$= \frac{4(3-x)}{3 \cdot (4-x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3-x}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

www.achamel.net

ج– جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $3 - x$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

3- دراسة الفرع اللانهائي بجوار $-\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{4-x}$

$= +\infty$

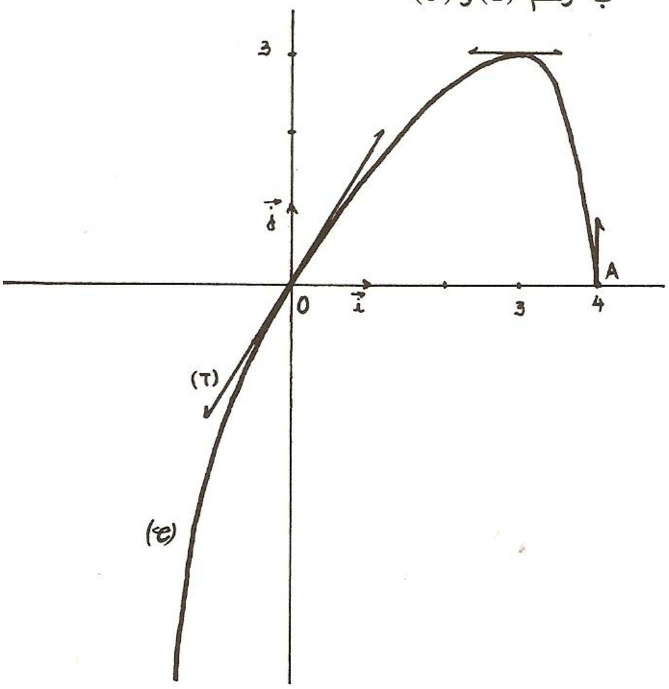
إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

4- أ– معادلة ديكارتية للمماس (T)

معادلة لهذا المماس هي : $y = f'(0)(x - 0) + 0$

أي : $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{16}}\, x$

ب– رسم (T) و $(\mathscr{C})$



www.achamel.net

5-أ- * حل المعادلة $f(x) = x$, $x \in [1, 3]$

ليكن x عنصرا من المجال $I = [1, 3]$

لدينا : $f(x) = x \Leftrightarrow x\sqrt[3]{4-x} = x$

$\Leftrightarrow x(\sqrt[3]{4-x} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4-x} - 1 = 0$ (لأن $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4-x} = 1$

$\Leftrightarrow 4 - x = 1$

$\Leftrightarrow x = 3$

وبما أن $3 \in [1, 3]$ فإن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = x$ في المجال $[1, 3]$ هي $\{3\}$

*** لنبين أن : $f(I) \subset I$**

ليكن x عنصرا من المجال $I = [1, 3]$

إذن : $1 \leq x \leq 3$

وبما أن f تزايدية على المجال $[1, 3]$

فإن : $f(1) \leq f(x) \leq f(3)$

أي : $\sqrt[3]{3} \leq f(x) \leq 3$

وبما أن : $1 \leq \sqrt[3]{3}$

فإن : $1 \leq f(x) \leq 3$

أي : $f(x) \in [1, 3]$

وهذا يعني أن : $f(I) \subset I$

ب- لنبين بالترجع أن : $1 \leq U_n \leq 3$ لكل n من IN

• لدينا : $U_0 = 1$

إذن $1 \leq U_0 \leq 3$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن : $1 \leq U_n \leq 3$ ولنبين أن : $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

لدينا : $1 \leq U_n \leq 3$

إذن : $1 \leq f(U_n) \leq 3$ (لأن $f(I) \subset I$)

أي : $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

خلاصة : لكل n من IN ، $1 \leq Un \leq 3$

ج- دراسة رتابة (U_n)

لدينا : $U_1 = f(U_0)$

$= f(1) = \sqrt[3]{3}$

ومنه : $U_1 \geq U_0$

لنبين إذن بالترجع أن $U_{n+1} \geq U_n$ لكل n من IN

• رأينا أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن : $U_{n+1} \geq U_n$ ولنبين أن : $U_{n+2} \geq U_{n+1}$

لدينا: $U_{n+1} \geq U_n$ و f تزايدية على $[1, 3]$

إذن : $f(U_{n+1}) \geq f(U_n)$

أي : $U_{n+2} \geq U_{n+1}$

خلاصة : لكل n من IN ، $U_{n+1} \geq U_n$

وهذا يعني أن المتتالية (U_n) تزايدية

د- استنتاج أن (U_n) متقاربة وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

المتتالية (U_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 3

إذن فهي متقاربة

وبما أن الدالة f متصلة على $[1, 3]$ فإن النهاية ℓ للمتتالية (U_n) تحقق : $f(\ell) = \ell$

وحسب نتيجة السؤال 5- أ- (الجزء الأول منه)

فإن : $\ell = 3$

وبالتالي فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$