I- 1- * التحقق من أن $x\left[1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}\right]=f(x)$ لكل x من $IR^{+*}$

ليكن x عنصرا من $IR^{+*}$

لدينا : $x\left[1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}\right]=x-x\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}$

$$=x-\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}$$

$$=x-\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=x-\sqrt[3]{1+x}=f(x)$$

* حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

رأينا أن : $f(x)=x\left[1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}\right]$ لكل x من $IR^{+*}$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}\right)=1-0=1$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2- أ-* لنبين أن : $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)+1}{x+1}=-\infty$

لكل x من $]-1,+\infty[$ : $\frac{f(x)+1}{x+1}=\frac{x-\sqrt[3]{1+x}+1}{x+1}$

$$=1-\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}=1-\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}=1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x+1)^3}}$$

$$=1-\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}}$$

وبما أن $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to(-1)^+}\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}}=+\infty$

وبالتالي فإن : $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{f(x)+1}{x+1} = -\infty$

**ملاحظة** : الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $(-1)$

*** التأويل الهندسي**

المنحنى $(C_f)$ يقبل في النقطة $A(-1,-1)$ نصف مماس رأسي موجه نحو الأسفل

**ب- حساب $f'(x)$**

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]-1,+\infty[$ :

$$f'(x) = \left[x - (x+1)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3(x+1)^{\frac{2}{3}} - 1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

وبما أن $3\sqrt[3]{(x+1)^2} > 0$ لكل x من $]-1,+\infty[$

فإن إشارة $f'(x)$ على $]-1,+\infty[$ هي إشارة $3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 1$

**ج- تغيرات f**

ليكن x عنصرا من $]-1,+\infty[$

لدينا :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt[3]{(x+1)^2}]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{\frac{1}{27}} \quad \text{أو} \quad x+1 = -\sqrt{\frac{1}{27}}$$

وبما أن $x+1>0$ (لأن $x>-1$)

فإن : $x+1 = \sqrt{\frac{1}{27}}$

وبالتالي فإن :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \frac{\sqrt{3}}{9}$$

و

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 > \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow x+1 > \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x > -1 + \frac{\sqrt{3}}{9}$$

و

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 + \frac{\sqrt{3}}{9}$$

إذن الدالة f تناقصية قطعا على $\left]-1\,,\,-1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right[$

وتزايدية قطعا على $\left[-1+\frac{\sqrt{3}}{9}\,,\,+\infty\right[$

وسنلخص هذه النتائج في جدول تغيرات الدالة f التالي :

| $x$ | $-1$ | | $-1+\frac{\sqrt{3}}{9}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $f\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ | | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**د– لنبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصورا بين $\frac{5}{4}$ و $\frac{4}{3}$**

لدينا : $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ و $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - \sqrt[3]{\frac{7}{3}}$

إذن : $f\left(\frac{5}{4}\right) < 0$ و $f\left(\frac{4}{3}\right) > 0$

وبما أن f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{5}{4}\,,\,\frac{4}{3}\right]$

فإنها تقابل من $\left[\frac{5}{4}\,,\,\frac{4}{3}\right]$ نحو المجال $\left[f\left(\frac{5}{4}\right), f\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

وبما أن : $0 \in \left[f\left(\frac{5}{4}\right), f\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

فإنه يوجد عدد حقيقي $\alpha$ ينتمي الى $\left]\frac{5}{4}\,,\,\frac{4}{3}\right[$

بحيث : $f(\alpha) = 0$

وهذا يعني أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ بحيث :

$$\frac{5}{4} < \alpha < \frac{4}{3}$$

**3- دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$**

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}} = 1 - 0 = 1$$

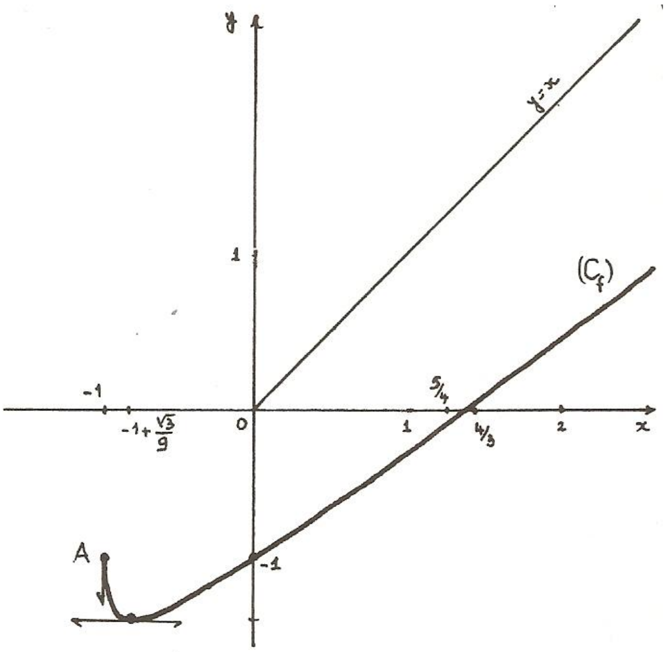
و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt[3]{1+x} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\sqrt[3]{1+x} = -\infty$$

إذن المنحنى $(C_f)$ يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة : $y = x$

**4- إنشاء $(C_f)$**




**II - 1- حساب $U_1$ و $U_2$ و $U_3$**

لدينا : $U_1 = \sqrt[3]{1 + U_0}$

$= \sqrt[3]{1+0} = 1$

و $U_2 = \sqrt[3]{1 + U_1}$

$= \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2}$

و $U_3 = \sqrt[3]{1 + U_2}$

$= \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2}}$

**2- أ– لنبين بالترجع أن : $0 \leq U_n \leq 2$ لكل n من IN**

• لدينا : $U_0 = 0$

إذن : $0 \leq U_0 \leq 2$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن $0 \leq U_n \leq 2$ ولنبين أن $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

لدينا : $0 \leq U_n \leq 2$

إذن : $1 \leq 1 + U_n \leq 3$

ومنه : $0 \leq 1 + U_n \leq 8$

وبالتالي فإن : $\sqrt[3]{0} \leq \sqrt[3]{1+U_n} \leq \sqrt[3]{8}$

أي : $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

**خلاصة :** لكل n من IN ، $0 \leq U_n \leq 2$

**ب– لنبين أن $(U_n)$ تزايدية**

لذلك سنبين بالترجع أن : $U_{n+1} \geq U_n$ لكل n من IN

• لدينا : $U_1 = 1$ و $U_0 = 0$

إذن : $U_1 \geq U_0$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن : $U_{n+1} \geq U_n$ ولنبين أن : $U_{n+2} \geq U_{n+1}$

لدينا: $U_{n+1} \geq U_n$ ، إذن : $1 + U_{n+1} \geq 1 + U_n$

ومنه : $\sqrt[3]{1 + U_{n+1}} \geq \sqrt[3]{1 + U_n}$ أي : $U_{n+2} \geq U_{n+1}$

**3- لنبين أن $(U_n)$ متقاربة نهايتها $\alpha$**

المتتالية $(U_n)$ تزايدية ومكبورة بالعدد 2

(لأن $U_n \leq 2$ لكل n من IN)

إذن فهي متقاربة

وبما أن الدالة $x \longmapsto \sqrt[3]{1+x}$ متصلة على $[0, 2]$

فإن النهاية $\ell$ للمتتالية $(U_n)$ تحقق : $\ell = \sqrt[3]{1+\ell}$

أي : $\ell - \sqrt[3]{1+\ell} = 0$ أي : $f(\ell) = 0$

وحسب نتيجة السؤال I - 2- د- فإن : $\ell = \alpha$