I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1, +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x - \sqrt[3]{1+x}$$

1- تحقق من أن : $f(x) = x\left[1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}}\right]$ ، لكل x من IR^*_+ -

واحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (1 ن)

2- أ- أثبت أن : $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x)+1}{x+1} = -\infty$

اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة. (1 ن)

ب- بين أن إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1, +\infty[$ هي إشارة :

$3\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1$ (1 ن)

ج- بين أن f تناقصية قطعا على $\left]-1, -1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right[$ ، وتزايدية

قطعا على $\left[-1+\frac{\sqrt{3}}{9}, +\infty\right[$ (1 ن)

د- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $\frac{5}{4} < \alpha < \frac{4}{3}$

. (1,5 ن)

3- ادرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f . (1 ن)

4- مثل مبيانيا f في معلم متعامد (خذ $-1+\frac{\sqrt{3}}{9} \approx -0,8$

و $f\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right) \approx -1,4$) . (1 ن)

II- لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{1+u_n} \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}$

1- احسب u_1 و u_2 و u_3 . (0,75 ن)

2-أثبت بالترجع أن :

أ- $0 \leq u_n \leq 2$ لكل n من IN . (0,5 ن)

ب- المتتالية (u_n) تزايدية.(0,5 ن)

3- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة نهايتها هي α . (0,75 ن)