-1 * حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 3x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3$
$= +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 - 3x} = +\infty$

وبالتالي فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ والتأويل الهندسي

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3-3x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(x-\frac{3}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\,.\sqrt{x-\frac{3}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{x-\frac{3}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x-\frac{3}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-\frac{3}{x}} = +\infty$$

وهذا يعني هندسيا أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

-2 * دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في $\sqrt{3}$

لدينا :

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{f(x)-f(\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{\sqrt{x^3-3x}}{x-\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x^3-3x}{(x-\sqrt{3})\sqrt{x^3-3x}} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x(x^2-3)}{(x-\sqrt{3})\sqrt{x^3-3x}}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})\sqrt{x^3-3x}} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x(x+\sqrt{3})}{\sqrt{x^3-3x}} = +\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $\sqrt{3}$

وهذا يعني هندسيا أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل في النقطة $A(\sqrt{3}, 0)$ نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى

* دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في $-\sqrt{3}$

لدينا :

$$\lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} \frac{f(x)-f(-\sqrt{3})}{x+\sqrt{3}} = \lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} \frac{\sqrt{x^3-3x}}{x+\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} \frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x+\sqrt{3})(\sqrt{x^3-3x})} = \lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} \frac{x(x-\sqrt{3})}{\sqrt{x^3-3x}} = +\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^+} x(x-\sqrt{3}) = 6$ و $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^+} \sqrt{x^3-3x} = 0^+$)

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $-\sqrt{3}$

وهـذا يعنـي هندسيـا أن المنحنـى $(\mathscr{C})$ يقبـل في النقطـة $B(-\sqrt{3}, 0)$ نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى .

*** دراسة قابلية اشتقاق f على اليسار في الصفر**

لدينا :
$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^3-3x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x^2-3)}{x\sqrt{x^3-3x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-3}{\sqrt{x^3-3x}}=-\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 0

وهذا يعني هندسيا أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل في النقطة $O(0, 0)$ نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى

3- أ- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$

ولدينا لكل x من $]-\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(x^3-3x)'}{2\sqrt{x^3-3x}}$$
$$=\frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}}=\frac{3(x^2-1)}{2\sqrt{x^3-3x}}$$

ب-* دراسة إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2-1

ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f'(x)$:

x	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||	//////		//////	||	$+$	

* جدول تغيرات الدالة f

x	$-\sqrt{3}$		-1		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|$	////////	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	////////	0	$\nearrow$	$+\infty$

4- أ- تحديد نقطة تقاطع (D) و (Δ) التي أفصولها موجب قطعا

ليكن x عنصرا من IR^{+*}

لدينا : $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 3x} = x$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x = x^2$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$ (لأن $x \neq 0$)

مميز الحدودية $x^2 - x - 3$ هو : $\Delta = 1 + 12 = 13$

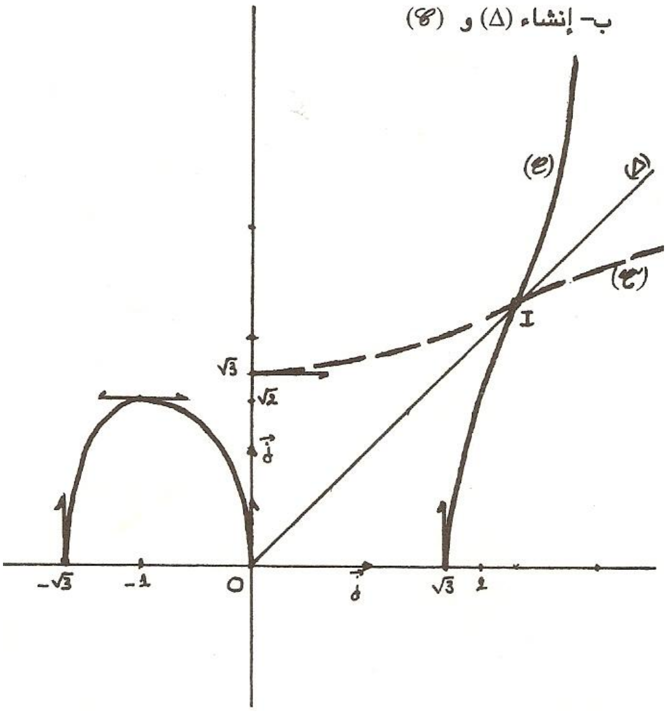
إذن جذراها هما : $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

وبما أن : $\frac{1+\sqrt{13}}{2} \in IR^{+*}$ و $\frac{1-\sqrt{13}}{2} \notin IR^{+*}$

فإن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = x$ في IR^{+*} هي $\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

وبالتالي فإن نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و (Δ) التي افصولها موجب قطعا هي النقطة $I\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

ب- إنشاء (Δ) و $(\mathscr{C})$



-5 أ- لنبين أن g تقابل من $[\sqrt{3}, +\infty[$ نحو مجال J

الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[\sqrt{3}, +\infty[$

إذن فهي تقابل من $[\sqrt{3}, +\infty[$

نحو $J = f([\sqrt{3}, +\infty[) = [0,+\infty[$

وبالتـالي فـهي تقبـل دالـة عكسية g^{-1} معرفة من IR^{+} نحو $[\sqrt{3}, +\infty[$

ب- إنشاء $(\mathscr{C}')$

المنحنى $(\mathscr{C}')$ هو مماثل منحنى الدالة f على $[\sqrt{3}, +\infty[$

بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل أعلاه)