1- تحديد D

ليكن x عددا حقيقيا

لدينا : $x \in D \Leftrightarrow x+1 \geq 0$ و $\sqrt{x+1}-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -1$ و $\sqrt{x+1} \neq 1$

$\Leftrightarrow x \geq -1$ و $x+1 \neq 1$

$\Leftrightarrow x \geq -1$ و $x \neq 0$

إذن : $D = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$

2- a- * حساب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ **و** $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

لكل x من D ،

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}+1}{x+1-1} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{x}$$

وبما أن : $\lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} = 1$

و $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} = -\infty$

فإن : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

* حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} = 0$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b- * حساب $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

لكل x من D ،

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+1}}{x} + \frac{1}{x(\sqrt{x+1} - 1)}$$

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x(\sqrt{x+1} - 1)}$$

وبما أن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x+1} - 1)} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$ (لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$)

فإن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

*** الاستنتاج :**

المنحنى (C) يقبل بجوار ∞+ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

3- a- دراسة قابلية اشتقاق f عند 1− على اليمين

لدينا :

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+1-\sqrt{x+1}+1+\sqrt{x+1}-1}{(x+1)(\sqrt{x+1}-1)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=-1$ على اليمين ولدينا :

$$f'_d(-1)=-1$$

b- * حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $D-\{-1\}$ ولدينا لكل x من $D-\{-1\}$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{(\sqrt{x+1}-1)'}{(\sqrt{x+1}-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}-1)^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2-1}{2\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}-1)^2}=\frac{(\sqrt{x+1}-1+1)(\sqrt{x+1}-1-1)}{2\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}-1)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}-2}{2(\sqrt{x+1}-1)^2}$$

*** جدول تغيرات الدالة f**

ليكن x عنصرا من $D-\{-1\}$

لدينا : $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-2=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2$$

$$\Leftrightarrow x+1=4$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

و $f'(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-2>0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}>2$$

$$\Leftrightarrow x+1>4$$

$$\Leftrightarrow x>3$$

و $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<3$

ومنه جدول تغيرات الدالة f على D:

x	-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	(-1)	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

4- a- التحقق من أن : $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{(\sqrt{x+1}-1)^2}\right]$

ليكن x عنصرا من $D-\{-1\}$

لدينا : $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{(\sqrt{x+1}-1)^2}\right] = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}-1-1}{(\sqrt{x+1}-1)^2}$

$$= \frac{\sqrt{x+1}-2}{2(\sqrt{x+1}-1)^2} = f'(x)$$

b- * حساب $f''(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $D-\{-1\}$ ولدينا لكل x من $D-\{-1\}$:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{(\sqrt{x+1}-1)^2}\right]'$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1}-1)^2} + \frac{2(\sqrt{x+1}-1)\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1}-1)^4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\sqrt{x+1}+1+2}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)^3}\right] = \frac{3-\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)^3}$$

*** نقطة الانعطاف**

إشارة $f''(x)$ هي إشارة $\dfrac{3-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}$

ومنه الجدول التالي الذي يعطي اشارة $f''(x)$ وتقعر المنحنى (C) :

x	-1		0		8		$+\infty$
$3-\sqrt{x+1}$		+		+	0	−	
$\sqrt{x+1}-1$		−		+		+	
$f''(x)$		−		+	0	−	
تقعر (C)							

الدالة ''f تنعدم مع تغيير الإشارة في 8

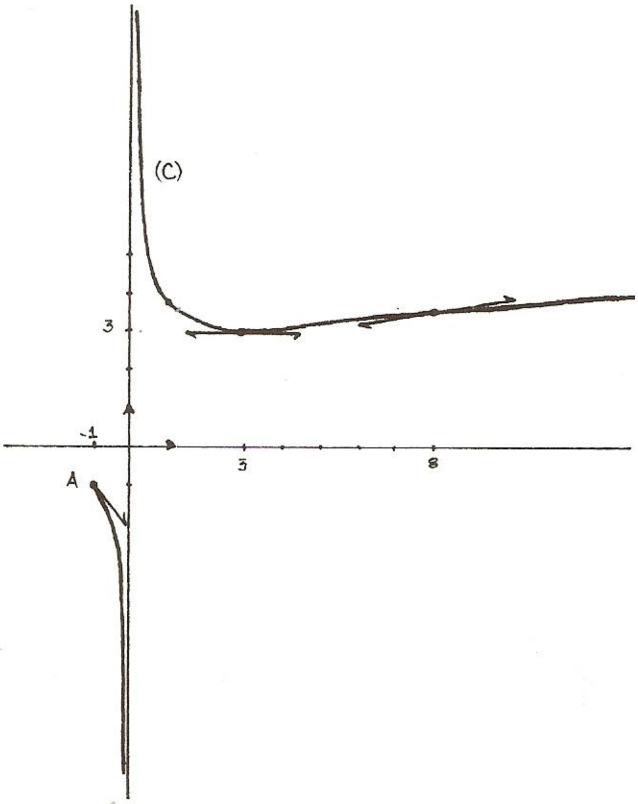
إذن المنحنى (C) يقبل بالفعل نقطة انعطاف أفصولها 8

5- إنشاء المماس والمنحنى (C)

معادلة ديكارتية لمماس (C) في نقطة الانعطاف هي :

$y = f'(8)(x-8) + f(8)$ أي : $y = \dfrac{1}{8}(x-8) + \dfrac{7}{2}$

أي : $y = \dfrac{1}{8}x + \dfrac{5}{2}$



ملاحظة : معادلة ديكارتية لحامل نصف مماس المنحنى (C) في النقطة $A(-1, -1)$ هي :

$y = f_d'(-1)(x+1) + f(-1)$ أي $y = -1(x+1) - 1$

أي : $y = -x - 2$

a-6- لنبين أن g تقابل من I نحو J

الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $I = [3, +\infty[$

إذن g تقابل من I نحو المجال : $J = g(I) = [3, +\infty[$

b- حساب $(g^{-1})'\left(\frac{7}{2}\right)$

لدينا : $(g^{-1})'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{7}{2}\right)\right)}$

وبما أن : $g(8) = \frac{7}{2}$ فإن : $g^{-1}\left(\frac{7}{2}\right) = 8$

وبالتالي فإن : $(g^{-1})'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{g'(8)}$

$$= \frac{1}{f'(8)} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$